# 微分積分学入門

(講義ノート・数物科学科１回生)

吉岡英生

第６版（令和２年３月 26 日）

# 目 次

# 第0章　はじめに

本ノートは、数物科学科１回生向けの講義「微分積分学入門」用の講義ノートであり、講義は本講義ノートに沿って進められる。本ノートを配布することにより、受講者には板書に頭と時間をとられずじっくり講義を聴いてもらいたい。

本ノートは https://goofy.phys.nara-wu.ac.jp/yoshioka/math1/text_2020.pdf からダウンロードできる。

本講義ノートを作成する際に参考とした図書は以下のとおりである。これらの図書は参考書として適切である。

1. 物理のための数学 (物理入門コース 10)　和達三樹 著　岩波書店
2. 自然科学者のための数学概論　寺沢寛一 著　岩波書店
3. 物理数学 (テキスト理系の数学)　上江洌達也 著　数学書房
4. 線型代数学 (数学選書 1)　佐武一郎 著　裳華房
5. 定本 解析概論　高木貞治 著　岩波書店

なお、本講義ノートには例題や演習問題の数が不足している。今後それらを充実させる予定であるが、各自で演習書の問題を解くことを強く勧める。

追伸：本ノートに間違い等を見つけたら、すぐにご指摘下さい。

# 第1章　基礎事項の確認

この章では、高校までに学習してきた基礎的事項を確認する。

## 1.1　三角関数

弧の長さと中心角は比例する。弧度法では、この事実を用いて角度を定義する。すなわち、中心角 $\theta$ は

$$\theta = \frac{\text{円弧の長さ}}{\text{円弧の半径}} \tag{1.1}$$

によって定義される。このように定義された角度は rad(ラジアン) という

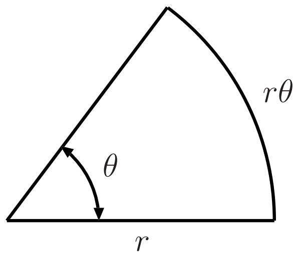


図 1.1: 半径 $r$、中心角 $\theta$ の円弧。

単位で表されるが、次元はない [1]。つまり無次元の量である。度数法と弧度法の間の関係は以下のとおりである。

| 度数法 | 弧度法 |
|---|---|
| $360°$ | $2\pi$ |
| $180°$ | $\pi$ |
| $90°$ | $\pi/2$ |
| $60°$ | $\pi/3$ |

[1] 自然界に存在する量には次元を持つ量と次元を持たない量が存在する。通常どちらの量も単位がある（原理的には次元を持たない量に単位をつける必要はないが)。同じ次元を持つ量であるにもかかわらず、異なる単位で表される場合もある。同じ次元をもつ場合に限り（その単位を合わせて）加減演算ができる。次元をもつ量の次元はかならず質量 [M]（kg)、時間 [T]（s)、長さ [L]（m)、電流 [I]（A）を使って表される。次元が異なる量の掛け算や割り算は可能であるが、その際には次元も量と同じ演算をせねばならない。

また、円弧の長さ $l$ と対応する扇型の面積 $S$ は

$$l = r\theta \tag{1.2}$$

$$S = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}r^2\theta \tag{1.3}$$

で与えられる。以下では、特に断わらない限り角度は弧度法で表すものとする。

三角関数は、図 1.2 から次のように定義される。点 P の座標を $(x, y)$ とすると、

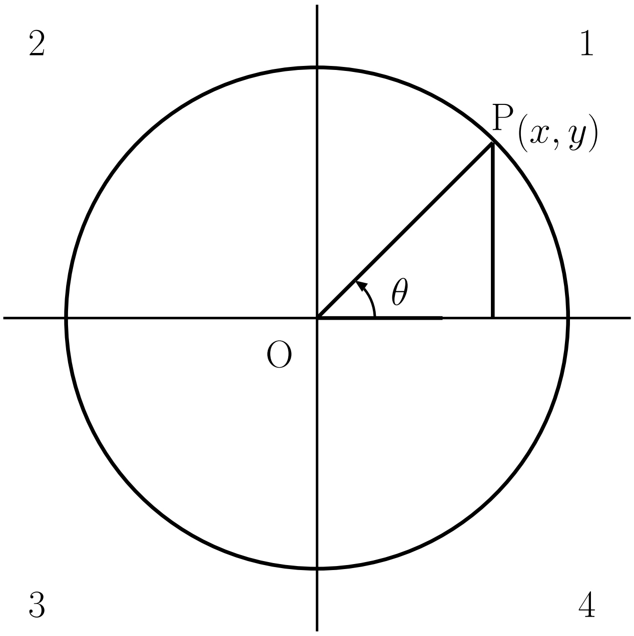


図 1.2:

$$\sin\theta = \frac{y}{\mathrm{OP}} = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} \tag{1.4}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\mathrm{OP}} = \frac{1}{\sec\theta} \tag{1.5}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cot\theta} \tag{1.6}$$

ここで、$\mathrm{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$ である。なお、$0 < \theta < \pi/2$ の場合には、P が第 1 象限にあるため上記の量は全て正の量であるが、$\pi/2 < \theta < \pi$ では、

$x < 0$ となるため、$\cos\theta$ と $\tan\theta$ が負となる。また、$\pi < \theta < 3\pi/2$ では、$x < 0$ および $y < 0$ となるため、$\sin\theta$ と $\cos\theta$ が負となる。さらに、$3\pi/2 < \theta < 2\pi$ では、$y < 0$ となるため、$\sin\theta$ と $\tan\theta$ が負となる。なお、$\theta \to -\theta$ とすると $y \to -y$ となるので

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \tag{1.7}$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta \tag{1.8}$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \tag{1.9}$$

すなわち、$\sin\theta$ と $\tan\theta$ は奇関数、$\cos\theta$ は偶関数である。また、$\sin\theta$ と $\cos\theta$ は周期 $2\pi$ の周期関数、$\tan\theta$ は周期 $\pi$ の周期関数である。

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta \tag{1.10}$$
$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta \tag{1.11}$$
$$\tan(\theta + \pi) = \tan\theta \tag{1.12}$$

これらの三角関数を図 1.3 に示す。

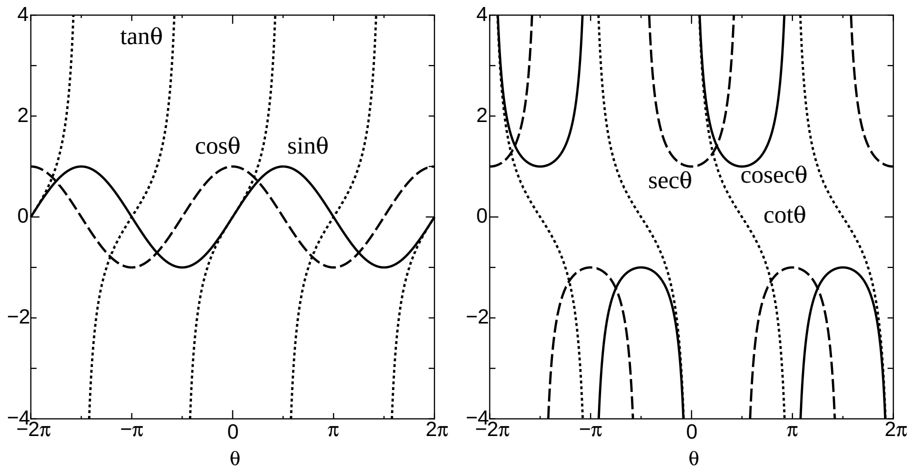


図 1.3: $\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$ および $\mathrm{cosec}\,\theta$、$\sec\theta$、$\cot\theta$ のグラフ。

三平方の定理を用いれば、

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{1.13}$$
$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \tag{1.14}$$

が得られる。また、加法定理は以下のとおりである。

$$\sin(\theta \pm \phi) = \sin\theta\cos\phi \pm \cos\theta\sin\phi \tag{1.15}$$

$$\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta\cos\phi \mp \sin\theta\sin\phi \tag{1.16}$$

$$\tan(\theta \pm \phi) = \frac{\tan\theta \pm \tan\phi}{1 \mp \tan\theta\tan\phi} \tag{1.17}$$

この式を用いると、三角関数の合成は以下のように得られる。

$$\begin{aligned} A\cos\theta + B\sin\theta &= \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\theta + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\theta\right) \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\sin(\theta+\alpha) & (1.18) \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\cos(\theta-\beta) & (1.19) \end{aligned}$$

ただし、

$$\cos\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \ \sin\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{1.20}$$

$$\cos\beta = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \ \sin\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{1.21}$$

次に基本的な不等式を記す。図 1.4 より、$0 < \theta < \pi/2$ の時、

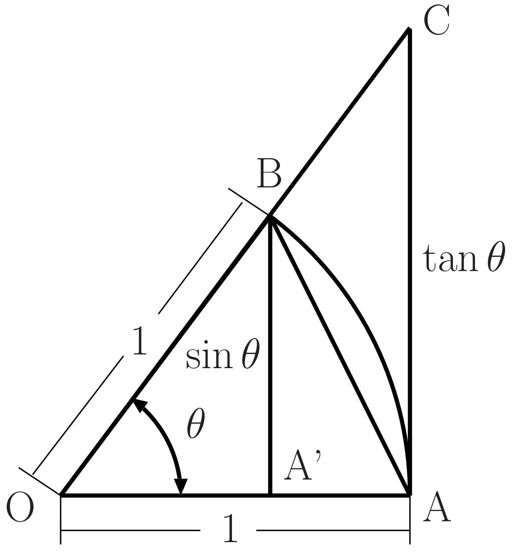


図 1.4:

$$
\begin{aligned}
&\text{三角形 OAB の面積} < \text{扇型 OAB の面積} < \text{三角形 OAC の面積}\\
&\Rightarrow 0 < \frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

が成り立つ。また、余弦定理を用いると、

$$
\begin{aligned}
&\text{弦 AB の長さ} < \text{弧 AB の長さ}\\
&\Rightarrow 0 < 2 - 2\cos\theta < \theta^2
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

が成り立つ。次に、$\theta \to 0$ の極限を考える。式 (1.22) より

$$
\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \ \cdots - \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \tag{1.24}
$$

が導かれるので [2]、

$$
\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \tag{1.25}
$$

となる [3]。同様にして、式 (1.23) より

$$
\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0 \tag{1.26}
$$

が導出される。

## 1.2 逆関数

ある関数

$$
y = f(x) \tag{1.27}
$$

があったとする。この式を $x = g(y)$ のように整理し、$x$ と $y$ を入れ換えることによって $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が得られる。

$$
x = g(y) \to y = g(x) \equiv f^{-1}(x) \tag{1.28}
$$

逆関数は多価関数 ($x$ の値を 1 つ決めた時、対応する $y$ の値が 2 つ以上ある) になる場合がある。図 1.5 に $y = x^2$ の逆関数 $y = \pm\sqrt{x}$(左)、と $\sin^{-1} x$、$\cos^{-1} x$、$\tan^{-1} x$(右) を記す。$y = x^2$ の逆関数は 2 価関数となる。周期関数 $\sin x$、$\cos x$、$\tan x$ の逆関数 $\arcsin x = \sin^{-1} x$、$\arccos x = \cos^{-1} x$、

[2] 式 (1.24) は、$0 < \theta < \pi/2$ の場合に導出された不等式であるが、$\cos(-\theta) = \cos\theta$、$\sin(-\theta)/(-\theta) = \sin\theta/\theta$ を用いると、$-\pi/2 < \theta < 0$ でも成り立つことがわかる。

[3] 極限値が存在するとは、右から近付けた場合と左から近付けた場合の極限の値が等しいことである。

$\arctan x = \tan^{-1} x$ は無限多価関数となっている。なお、多価関数の 1 価の部分を取り出したものを主値という。上記の逆三角関数の主値は最初の文字を大文字にして表す。

$$-\frac{\pi}{2} \le \mathrm{Arcsin}\ x \le \frac{\pi}{2} \tag{1.29}$$

$$0 \le \mathrm{Arccos}\ x \le \pi \tag{1.30}$$

$$-\frac{\pi}{2} \le \mathrm{Arctan}\ x \le \frac{\pi}{2} \tag{1.31}$$

一般的な逆三角関数の値は主値を用いて以下のように与えられる。

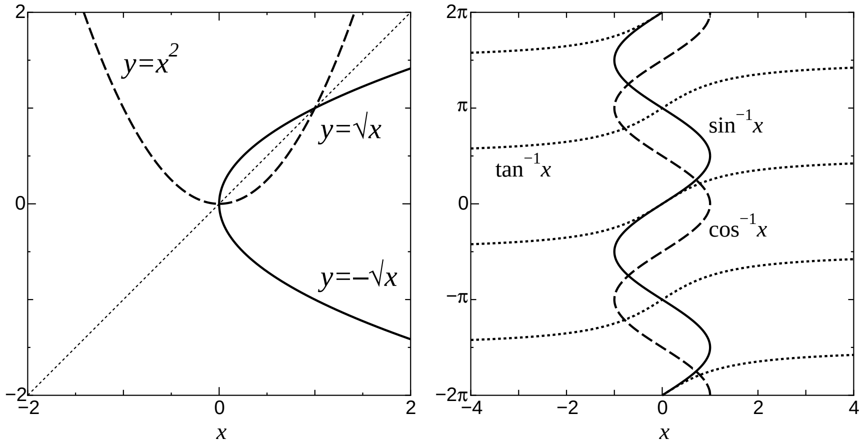


図 1.5: $y = x^2$ の逆関数 $y = \pm\sqrt{x}$(左)、と $\sin^{-1} x$、$\cos^{-1} x$、$\tan^{-1} x$(右)。

$$\arcsin x = n\pi + (-1)^n \mathrm{Arcsin}\ x \tag{1.32}$$

$$\arccos x = 2n\pi \pm \mathrm{Arccos}\ x \tag{1.33}$$

$$\arctan x = n\pi + \mathrm{Arctan}\ x \tag{1.34}$$

ここで、$n$ は任意の整数である。

## 1.3 指数関数と対数関数

$a$ をある正の数として、

$$f(x) = a^x \tag{1.35}$$

を指数関数という。指数関数は $f(0) = 1$ を満たし、明らかに $0 < a < 1$ の場合は減少関数、$a > 1$ の場合は増加関数となる。図 1.6 に指数関数の

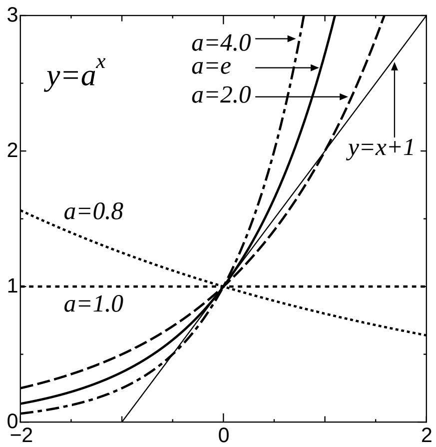


図 1.6: $y = a^x$ のグラフ。細い直線は $y = x + 1$ を表す。

グラフを示す。特に物理において重要なものは $a = \mathrm{e}$ の場合である。ただし、定数 e は

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \simeq 2.71828 \tag{1.36}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1 \tag{1.37}$$

で与えられる。なお、下の条件は指数関数 $y = a^x$ の $x = 0$ での傾きが 1 となるような指数を e とすることである (図 1.6 の細い実線を参照)。以後、指数関数という場合は $y = \mathrm{e}^x$ を表すことにする。指数関数の性質を記す。

$$\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y} \tag{1.38}$$

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^{x-y} \tag{1.39}$$

$$(\mathrm{e}^x)^y = \mathrm{e}^{xy} \tag{1.40}$$

指数関数の逆関数を対数関数という。すなわち、

$$a^y = x \text{ の時、} y = \log_a x \ \ (a \text{ を底とする対数関数}) \tag{1.41}$$

特に $a = \mathrm{e}$ の場合を自然対数、$a = 10$ の場合を常用対数という。自然対数は、次のように書くこともある。

$$\log_{\mathrm{e}} x,\ \ \log x,\ \ \ln x \tag{1.42}$$

底の変換公式は以下のとおりである。

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \tag{1.43}$$

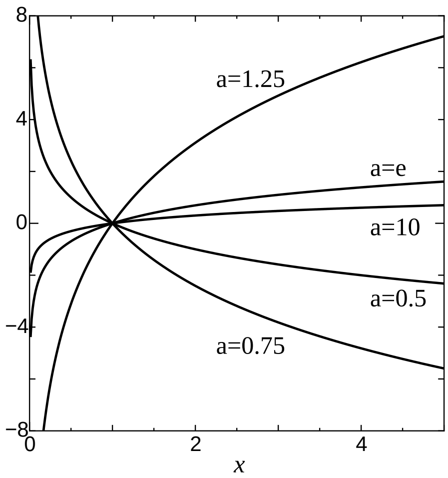


図 1.7: $y = \log_a x$ のグラフ。

これらの関数を図 1.8 に記す。対数関数の基本的な性質は以下のとおりである。

$$\log xy = \log x + \log y \tag{1.44}$$

$$\log(x/y) = \log x - \log y \tag{1.45}$$

$$\log x^y = y \log x \tag{1.46}$$

## 1.4　双曲線関数

双曲線関数は指数関数 $\mathrm{e}^x$ を用いて以下のように定義される[4]。

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \tag{1.47}$$

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \tag{1.48}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \tag{1.49}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} \tag{1.50}$$

$$\mathrm{sech}\ x = \frac{1}{\cosh x} \tag{1.51}$$

$$\mathrm{cosech}\ x = \frac{1}{\sinh x} \tag{1.52}$$

[4] sinh、cosh、tanh、coth はそれぞれ、sh、ch、th、cth と書かれることもある。

これらの関数を図 1.8 に記す。定義から明らかなように、$\sinh x$ と $\tanh x$ は奇関数であり、$\cosh x$ は偶関数である。また、$\cosh x$ は $x = 0$ で最小値 $\cosh 0 = 1$ をとる。また、以下のような恒等式を満たす。

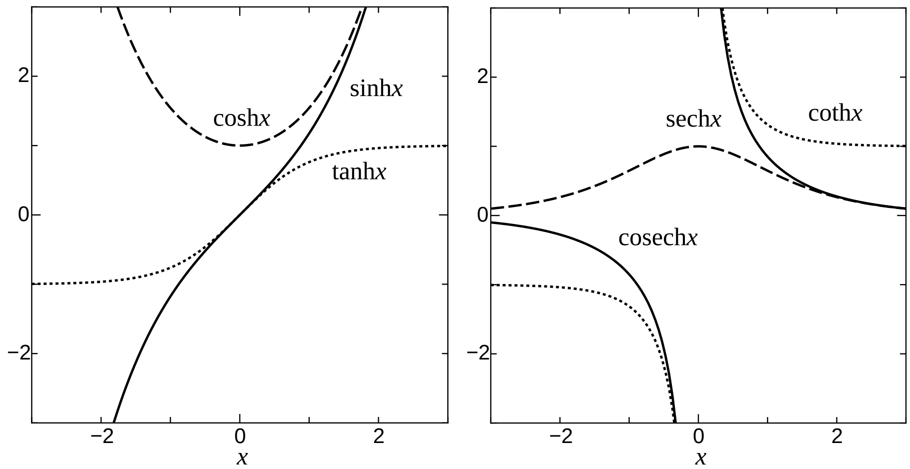


図 1.8: $\sinh x$、$\cosh x$、$\tanh x$(左) および cosech $x$、sech $x$、$\coth x$(右) のグラフ。

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{1.53}$$

$$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} \tag{1.54}$$

また、双曲線関数の加法定理は以下のように与えられる。

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \tag{1.55}$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \tag{1.56}$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y} \tag{1.57}$$

$$\coth(x \pm y) = \frac{\coth x \coth y \pm 1}{\pm \coth x + \coth y} \tag{1.58}$$

# 第2章　位置、速度、加速度

この章では、物理に現れる微分と積分の例として、質点の位置、速度、加速度とその相互の間の関係を論じる。

## 2.1　位置

我々が存在する3次元空間で位置Pを指定する方法を考える。まず、空間中のある点をOとし、この点を通り互いに直交する3本の直線を導入する。これを座標系という。点Oのことを座標原点(または原点)といい、3本の直線のことを座標軸という。原点と軸を明示するためこの座標系を $\mathrm{O}-xyz$ と記すこともある。空間内の点Pは、この点を通り座標軸に平行

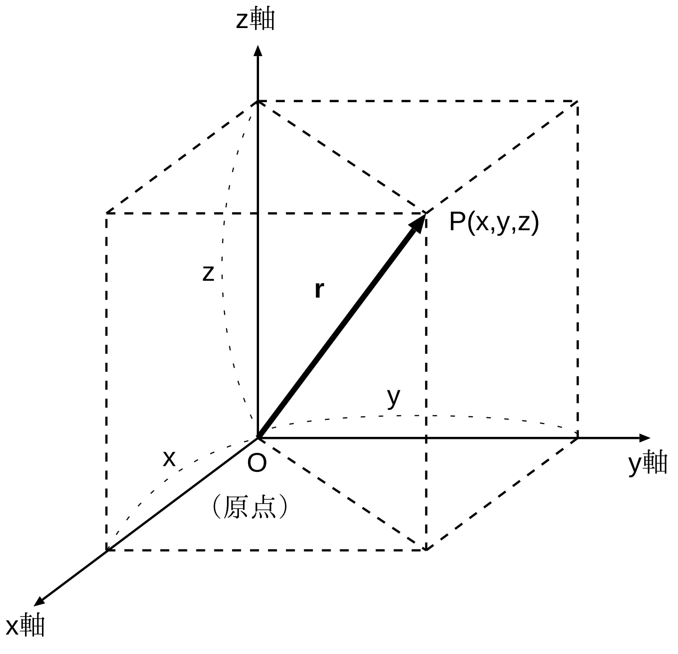


図 2.1: 座標系と空間中の位置の指定。

にひいた直線と座標軸とでつくられる直方体の3辺の長さ $(x, y, z)$ で指定される。このような3つ変数の組のことを座標といい、$\mathrm{P}(x, y, z)$ と表す。

また、1つの位置を指定するのに$x$、$y$、$z$という3つの実数を用いるかわりに原点OからPに引いた矢印によって指定することができる。この矢印を点Pの位置ベクトルといい、$\vec{r}$または$\boldsymbol{r}$であらわす。

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) \quad \text{または} \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

このとき、$x$、$y$、$z$は$\boldsymbol{r}$の成分とよばれる。

$x$軸、$y$軸、$z$軸に沿った単位長さのベクトルを考え、それらを$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$と書くと、位置ベクトル$\boldsymbol{r}$は

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{2.2}$$

と表される。

質点 (質量が有限で大きさの無視できる物体) の位置は、座標を用いて指定される。力学の問題を解くことを”運動を決定する”というが、それは各々の時刻における座標、すなわち各々の時刻における位置ベクトルを知ることである。

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \tag{2.3}$$

## 2.2 速度

かんたんのため、1直線上の運動を考える。この時、位置を指定するためには1つの実数$x$を用いればよい。このような運動のことを1次元運動という。今、1次元の運動が決定されたものとする。すなわち、$x = x(t)$

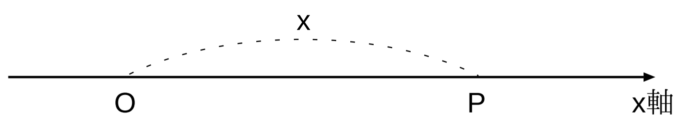


図 2.2: 1次元運動の座標系。

が得られている。このとき、時刻$t_0$と$t_0 + \Delta t$の間の平均の速度$\bar{v}$は

$$\bar{v} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \tag{2.4}$$

で与えられる。今、$\Delta t \to 0$の極限をとる。

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \tag{2.5}$$

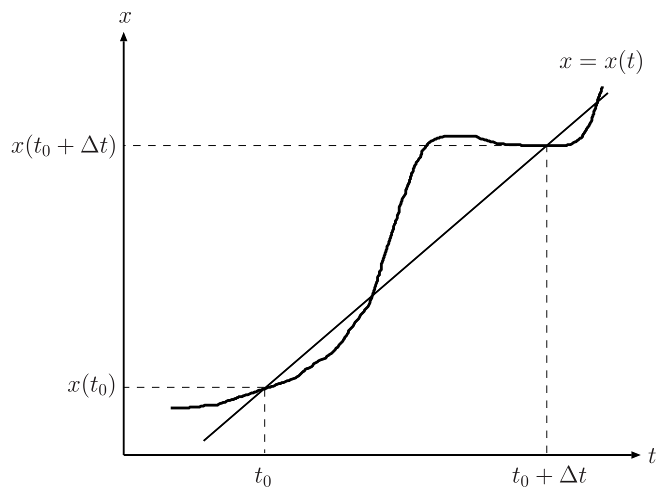


図 2.3: 1 次元運動における位置と時刻のグラフ。

右辺は $x(t)$ の $t = t_0$ の微分に他ならないので [1]、上の式は、**速度は位置を時間で微分したものである**ことを示している。すなわち、速度 $v(t)$ と位置 $x(t)$ の間には

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t) \tag{2.6}$$

という関係が成り立つ [2]。特に時間についての微分を $\dot{x}(t)$ のように、$\dot{}$ (ドットという) をつけて表す。

3 次元空間での運動では、位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(t) &= (x(t), y(t), z(t)) & (2.7) \\ &= x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} & (2.8) \end{aligned}$$

のように与えられるので、速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(t) &= \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t) & (2.9) \\ &= \left(\frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}y(t), \frac{d}{dt}z(t)\right) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) & (2.10) \\ &= \frac{dx(t)}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy(t)}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz(t)}{dt}\boldsymbol{k} = v_x(t)\boldsymbol{i} + v_y(t)\boldsymbol{j} + v_z(t)\boldsymbol{k} & (2.11) \end{aligned}$$

[1] 微分の定義は第 4 章で与えるが、微分の定義は高校で習得しているはずなので、ここでは既知のものとする。

[2] 位置の次元が [L]、速度の次元が [LT$^{-1}$] であることからわかるように、次元をもつ量で微分をするとその量の逆数の次元が付加される。これは次元解析の際注意すべきことである。

または

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(t) &= \dot{\boldsymbol{r}}(t) && (2.12)\\
&= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) && (2.13)\\
&= \dot{x}(t)\boldsymbol{i} + \dot{y}(t)\boldsymbol{j} + \dot{z}(t)\boldsymbol{k} = v_x(t)\boldsymbol{i} + v_y(t)\boldsymbol{j} + v_z(t)\boldsymbol{k} && (2.14)
\end{aligned}
$$

のように表される。

## 2.3　加速度

再び、一次元運動を考え、速度 $v(t)$ が得られたものとする。平均の加

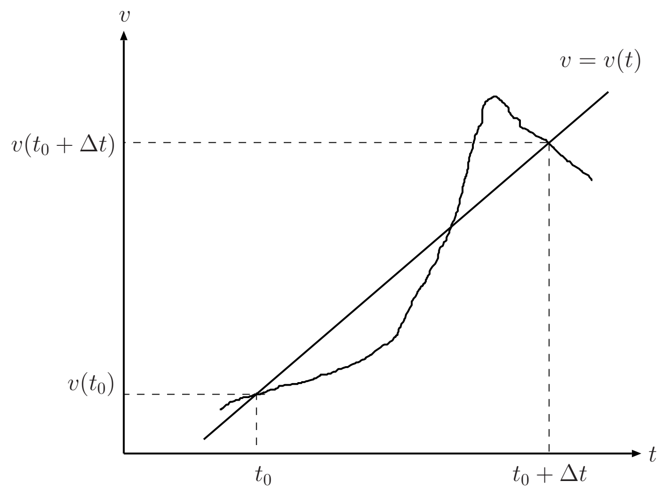


図 2.4: 1 次元運動における速度と時刻のグラフ。

速度 $\bar{a}(t_0)$ は

$$\bar{a}(t_0) = \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} \tag{2.15}$$

で与えられ、$\Delta t$ を 0 に近づけると、時刻 $t_0$ における加速度が得られる。上式において $\Delta t \to 0$ とし、$t_0$ を改めて $t$ とすると時刻 $t$ における加速度 $a(t)$ は

$$
\begin{aligned}
a(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(t) = \dot{v}(t) && (2.16)\\
&= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x(t) = \ddot{x}(t) && (2.17)
\end{aligned}
$$

で与えられる。すなわち、加速度は速度の時間についての 1 階微分である。したがって、座標の時間についての 2 階微分となる。

なお、3 次元の運動では

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(t) &= (a_x(t), a_y(t), a_z(t)) \\ &= a_x(t)\boldsymbol{i} + a_y(t)\boldsymbol{j} + a_z(t)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

とすると、

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}(t) \tag{2.18}$$

$$a_x(t) = \frac{d}{dt}v_x(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) \tag{2.19}$$

$$a_y(t) = \frac{d}{dt}v_y(t) = \frac{d^2}{dt^2}y(t) \tag{2.20}$$

$$a_z(t) = \frac{d}{dt}v_z(t) = \frac{d^2}{dt^2}z(t) \tag{2.21}$$

となる。

例) 自由落下

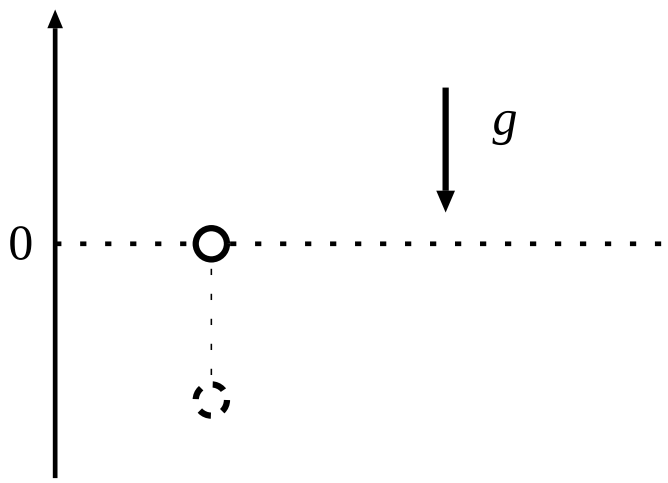


図 2.5:

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{2.22}$$

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = -gt \tag{2.23}$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = -g \tag{2.24}$$

## 2.4　速度および加速度の積分

まず、かんたんのため 1 直線上を進む物体の運動を考える。時刻 $t$ と $t+\Delta t$ の間の平均の速度を $\bar{v}(t)$ とすると、この時間内に物体が移動する距離 $\Delta x$ は以下のように与えられる。

$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t) = \bar{v}(t)\Delta t \tag{2.25}$$

今、$v(t)$ が得られているものとする。$t_i$ と $t_f$ の間を $n$ 等分し、$t_i = t_0$、

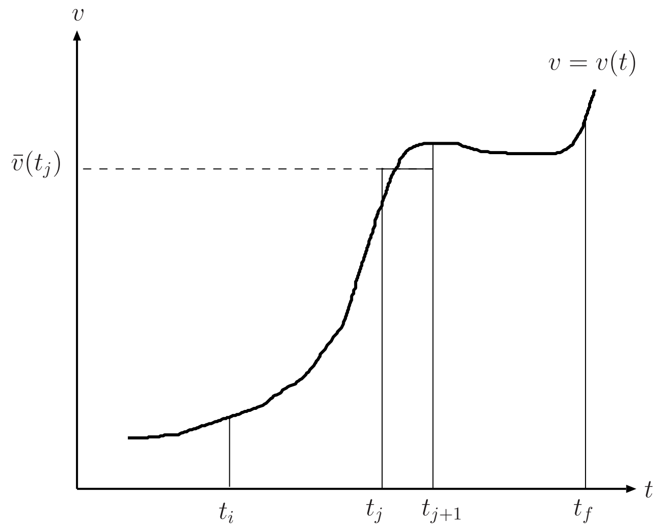


図 2.6:

$t_f = t_n$ として、

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \cdots = t_n - t_{n-1} = \Delta t$$

とおき、それぞれの間の平均の速度を $\bar{v}(t_j)(j = 0, 1, \cdots, n-1)$ とすると、

$$\begin{aligned} x(t_n) - x(t_{n-1}) &= \bar{v}(t_{n-1})\Delta t \\ x(t_{n-1}) - x(t_{n-2}) &= \bar{v}(t_{n-2})\Delta t \\ &\vdots \\ x(t_1) - x(t_0) &= \bar{v}(t_0)\Delta t \end{aligned}$$

が成り立つ。左右両辺を足し加え、$\Delta t \to 0$ の極限をとると、

$$\begin{aligned} x(t_n) - x(t_0) &= \sum_{j=0}^{n-1} \bar{v}(t_j)\Delta t \\ \xrightarrow{\Delta t \to 0} x(t_f) - x(t_i) &= \int_{t_i}^{t_f} v(t)dt \end{aligned} \tag{2.26}$$

が得られる[3]。すなわち、速度を積分することによって座標 (の差) が得られる[4]。同様の考察を加速度についておこなうと、

$$x(t) \underset{積分}{\overset{微分}{\rightleftarrows}} v(t) \underset{積分}{\overset{微分}{\rightleftarrows}} a(t) \tag{2.27}$$

となる。3 次元の運動では

$$\boldsymbol{x}(t) \underset{積分}{\overset{微分}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{v}(t) \underset{積分}{\overset{微分}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{a}(t) \tag{2.28}$$

の関係となる。

なお、微分の式 $\dfrac{dx}{dt} = v$ を

$$dx = vdt \tag{2.29}$$

と書き、これを微小変化 $dx$ と微小時間 $dt$ との間の関係とみなすことができる。この式の両辺に積分記号を追加すると

$$\int dx = \int vdt \tag{2.30}$$

すなわち

$$\int_{x(t_i)}^{x(t_f)} dx = x(t_f) - x(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} v(t)dt \tag{2.31}$$

となり、式 (2.26) が得られる。物理ではこのような形式的な演算がしばしば用いられる。

例　速度 $v(t)$ が与えられているとき、位置 $x(t)$ と加速度 $a(t)$ を求めよ。

1. $v(t) = v_0$ ($v_0$：一定)

$$x(t) = v_0 t \quad \cdots \quad \text{(a)} \tag{2.32}$$

$$a(t) = 0 \tag{2.33}$$

[3]微分と同様に積分の定義も第 4 章で与えるが、ここでは既知のものとする。
[4]次元を持った量で積分するとその量の次元が付加されることに注意。

2. $v(t) = at$ ($a$ : 一定)

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 \quad \cdots \quad \text{(b)} \tag{2.34}$$

$$a(t) = a \tag{2.35}$$

3. $v(t) = v_0 \cos \omega t$

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad \cdots \quad \text{(c)} \tag{2.36}$$

$$a(t) = -\omega v_0 \sin \omega t \tag{2.37}$$

注 (a)、(b)、(c) の一般的な答え (一般解) は、$x_0$ を定数として

$$\text{(a)} \to x(t) = v_0 t + x_0 \tag{2.38}$$

$$\text{(b)} \to x(t) = \frac{1}{2}at^2 + x_0 \tag{2.39}$$

$$\text{(c)} \to x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \tag{2.40}$$

で与えられる。これは、不定積分の際に積分定数がつくことに対応する (すなわち、定数を微分するとゼロになるから)。

# 第3章　ニュートンの運動方程式

## 3.1　ニュートンの運動方程式とその解

”方程式を解く”とは、その等式を満たすような未知変数の値を求めるということである。例えば、

$$ax + b = 0$$
$$ax^2 + bx + c = 0$$

これらの式のうち、上式は 1 次方程式、下式は 2 次方程式であり、この式を満たすような変数 $x$ のことを解という。

そのような見方でニュートンの運動方程式 (運動の第 2 法則) を考えてみよう。(方程式と名前がついているから、上であげた 1 次方程式や 2 次方程式に対応する意味があるはずである。) これまで同様、簡単のため 1 次元の運動を考える。ニュートンの運動方程式は

$$\text{質量} \times \text{加速度} = \text{はたらく力} \tag{3.1}$$
$$ma = F \tag{3.2}$$

で与えられる。前章で学んだように、加速度は位置 $x$ の時間についての 2 階微分

$$a = \frac{d^2}{dt^2}x = \ddot{x} \tag{3.3}$$

なので、これを運動方程式に代入すると

$$m\frac{d^2}{dt^2}x = F \tag{3.4}$$

が得られる。式 (3.4) の意味するところは、この式を満たす $x(t)$ が実際に実現している運動であるということである。すなわち、運動を求めるとは、この式を満たすような $x(t)$ を求めるということであり、そうすれば未来永劫の運動がわかるということである。その意味で、式 (3.4) は”方程式”である。数学的な言いかたをすれば、これは微分を含むので”微分方程式”であり、特に 2 階の微分を含むので 2 階の微分方程式という。

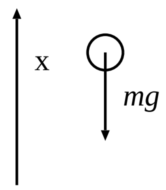


図 3.1:

例 1　自由落下その 1

ニュートンの運動方程式は、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg \tag{3.5}$$

で与えられる。$d^2x/dt^2 = dv/dt$ であることを用いると、この微分方程式は次のように解かれる。

$$\frac{dv}{dt} = -g \tag{3.6}$$

$$v(t) = v_0 - gt \tag{3.7}$$

ここで、$v_0$ は積分定数であり、上式に $t = 0$ を代入するとわかるとおり $v(0) = v_0$ なので、$t = 0$ における速度（初速度）を表している。

さらに、$v(t) = dx/dt$ であることを用いると

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - gt$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3.8}$$

が得られ、運動が求められたことになる。ここで、$x_0$ は積分定数であり、上式に $t = 0$ を代入するとわかるとおり $x(0) = x_0$ なので、$t = 0$ における位置（初期位置）を表す。（初速度）を表している。

この例題からわかるとおり、ニュートンの運動方程式の解は 2 つの未知定数を含む。これは、数学的には、ニュートンの運動方程式が 2 階の微分方程式であることに由来する。また、物理的には、ある時刻における位置と速度が分かれば、その運動は未来永劫決定されることになるということを表している。

例 2　自由落下その 2

次に斜めに小球を投げる場合を考える。水平方向（$x$ 軸方向）と垂

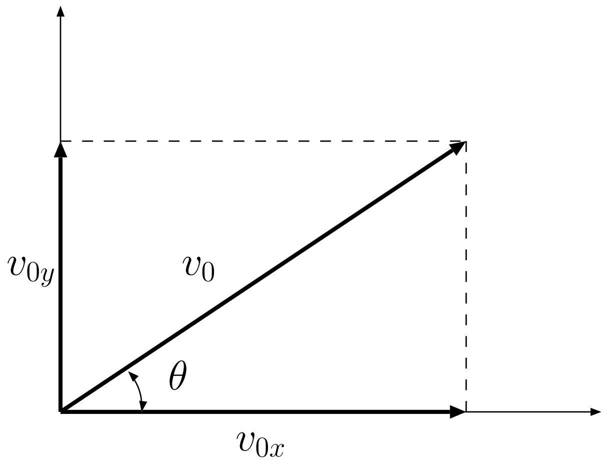


図 3.2:

直方向（$y$ 軸方向）の運動方程式はそれぞれ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \tag{3.9}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \tag{3.10}$$

なので、$t = 0$ における小球の位置を $(x_0, y_0)$、速度を $(v_{0x}, v_{0y})$ とすると、任意の時刻 $t$ における位置 $(x(t), y(t))$ は

$$x(t) = v_{0x}t + x_0 \tag{3.11}$$

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 + y_0 \tag{3.12}$$

によって与えられる。

ここで、軌道（$x(t)$ と $y(t)$ との間の関係）を求めよう。かんたんのため、$x_0 = 0$、$y_0 = 0$ とする。式（3.11）より、

$$t = \frac{x(t)}{v_{0x}}$$

なので、式（3.12）に代入すると、

$$y(t) = -\frac{g}{2v_{0x}^2}\left\{x(t) - \frac{v_{0x}v_{0y}}{g}\right\}^2 + \frac{v_{0y}^2}{2g} \tag{3.13}$$

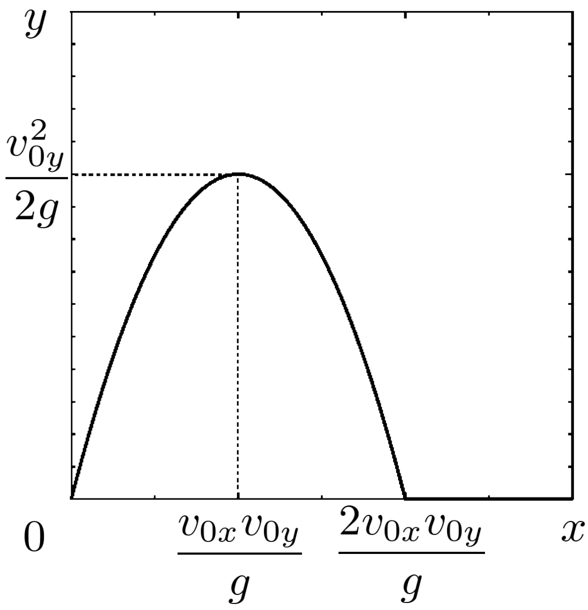


図 3.3:

が得られる。したがって、到達距離は

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{2v_{0x}v_0 y}{g} \\
&= \frac{2v_0^2}{g}\cos\theta\sin\theta \\
&= \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

で与えられ、$\theta = \pi/4$ の時最大となる。ここで、$v_{0x} = v_0\cos\theta$、$v_{0y} = v_0\sin\theta$ を用いた。

例 3　バネに取り付けられた小球の運動

小球の質量を $m$、自然長からの変位を $x$ とすると、運動方程式は

$$
m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{3.15}
$$

で与えられる。ここで、$k$ はバネ定数と呼ばれる定数である。$\omega^2 \equiv k/m$ を導入すると、上の運動方程式は

$$
\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \tag{3.16}
$$

$$
\frac{d^2x}{ds^2} = -x \tag{3.17}
$$

となる。第１行から第２行への変形の際に $s = \omega t$ を導入した。式（3.17）の解は、２階微分すると負号がついてもとに戻る関数なので、それは、$\cos s = \cos \omega t$ と $\sin s = \sin \omega t$ であるし、その和

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{3.18}$$

も解となっている。ここで、$A$ と $B$ は定数である。もっとも一般的な解の形が式（3.18）である。そのため、式（3.18）は一般解と呼ばれる。この式を１階微分すると速度 $v(t)$ が得られる。

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t \tag{3.19}$$

$x(0) = x_0$、$v(0) = v_0$ とすると、$x_0 = A$、$v_0 = \omega B$ なので、

$$x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \tag{3.20}$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega x_0\sin\omega t + v_0\cos\omega t \tag{3.21}$$

## 3.2 ニュートンの運動方程式と保存則

力学系には、様々な ”保存則 ”が存在する。それら全てニュートンの運動方程式から導かれる。

- 運動量保存則

  運動量 $p$ は以下のように定義される。

$$p = mv = m\frac{dx}{dt} \tag{3.22}$$

  これを用いると、ニュートンの運動方程式は以下のように書かれる。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F \leftrightarrow \frac{d}{dt}p = F \tag{3.23}$$

  働く力がゼロ、すなわち $F = 0$ の場合、運動量は保存する。

- エネルギー保存則

  外力 $F$ がある量 $U$ を用いて

$$F = -\frac{dU}{dx} \tag{3.24}$$

  と書けたとする。例えば、

$$\text{自由落下}\cdots F = -mg \to U = mgx$$
$$\text{バネにつながれた小球}\cdots F = -kx \to U = \frac{1}{2}kx^2$$

このとき、運動方程式は以下のとおり書かれる。

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{dU}{dx}$$

両辺に $dx/dt$ をかけると

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}=-\frac{dU}{dx}\frac{dx}{dt}$$

が得られる。ここで、

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\cdots\quad\text{注}1$$

$$\frac{dU}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{dU}{dt}\cdots\quad\text{注}2$$

したがって

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+U\right\}=0 \tag{3.25}$$

すなわち、エネルギー保存則

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+U=\text{一定}=E \tag{3.26}$$

が得られる。ここで左辺第１項を運動エネルギー、第２項をポテンシャルエネルギーという。

注１　積の微分の公式

$$\frac{d}{dt}(AB)=\frac{dA}{dt}B+A\frac{dB}{dt} \tag{3.27}$$

において、$A=B=dx/dt$ とする。

注２　$U=U(x(t))$ の場合、$U$ を $t$ で微分すると

$$\frac{dU}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{U(x(t+\Delta t))-U(x(t))}{\Delta t} \tag{3.28}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{U(x(t+\Delta t))-U(x(t))}{x(t+\Delta t)-x(t)}\times\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \tag{3.29}$$

となる。ここで、$x(t+\Delta t)=x(t)+\Delta x$ と書くと、$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta x=0$ なので、

$$\frac{dU}{dt}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{U(x(t)+\Delta x)-U(x(t))}{\Delta x}\times\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \tag{3.30}$$

$$=\frac{dU}{dx}\frac{dx}{dt} \tag{3.31}$$

# 第4章　微分・積分の基礎事項（1変数）

本章では1変数関数の微分と積分の基礎事項を確認する。ただし、その一部は第2章および第3章ですでに用いられている。

## 4.1　微分の基礎事項

微分可能（なめらか）であるとは、次の量が存在することである。

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{4.1}$$

ここで、存在するという意味は、右から近づけても左から近づけても等しいということである。すなわち、

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{4.2}$$

この値を

$$\frac{df}{dx} \qquad f'(x) \qquad f^{(1)}(x)$$

と書き、微分という。図4.1の関数のうち、

- $f(x)$：連続でなめらかな関数。
- $g(x)$：$x=a$ で不連続な関数。すなわち、

$$\lim_{\Delta x \to +0} g(a+\Delta x) \neq \lim_{\Delta x \to -0} g(a+\Delta x) \tag{4.3}$$

- $h(x)$：$x=a$ でなめらかでない関数。すなわち、

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{h(a+\Delta x)-h(a)}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \to -0} \frac{h(a+\Delta x)-h(a)}{\Delta x} \tag{4.4}$$

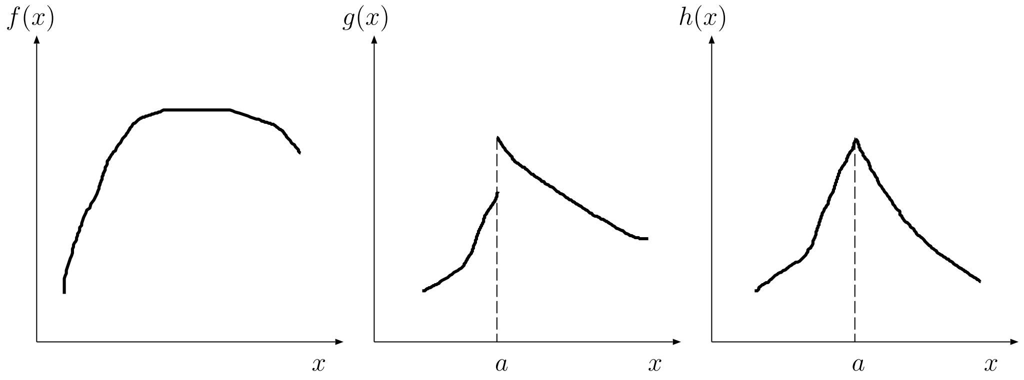


図 4.1: $f(x)$：連続でなめらかな関数。$g(x)$：$x = a$ で不連続な関数。$h(x)$：$x = a$ でなめらかでない関数。

微分の定義式（4.1）を用いると、$a$ と $b$ を定数として

$$\frac{d}{dx}\{af(x) + bg(x)\} = af'(x) + bg'(x) \tag{4.5}$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{4.6}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \tag{4.7}$$

が成り立つ。式（4.6）と式（4.7）の証明は以下のとおりである。

- 式（4.6）の証明

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} \\
=&\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
=&\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
=&\lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x+\Delta x) + f(x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right\} \\
=&f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

- 式（4.7）の証明

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right\}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\left\{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x)-f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right\}\\
&=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

関数 $F(x(t))$ の $t$ についての微分は

$$\frac{d}{dt}F(x(t))=\frac{dx}{dt}\frac{dF}{dx} \tag{4.10}$$

と書かれる（前章注 2 参照）。

$y=f(x)$ の微分 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{4.11}$$

で与えられ、$y=f(x)$ の逆関数 $x=g(y)$ の微分 $g'(y)$ は

$$g'(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} \tag{4.12}$$

であるから、

$$f'(x)g'(y)=1,\ \text{すなわち，}\ \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy}=1 \tag{4.13}$$

が成り立つ。なお、上式が成り立つためには、$x$ と $y$ が 1 対 1 に対応していること、すなわち $y=f(x)$ と $x=g(y)$ がともに 1 価関数であることが必要である [1]。

例 1 $y=\cos x$

$$y'=-\sin x \tag{4.14}$$

[1] $y=f(x)$ と $x=g(y)$ がともに 1 価関数でないと、式 (4.11) の $\Delta x\to 0$ と式 (4.12) の $\Delta y\to 0$ が対応しない。

例 2　$y = \sin x$

$$y' = \cos x \tag{4.15}$$

例 3　$y = \tan x$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{4.16}$$

例 4　$y = \mathrm{e}^x$

$$y' = \mathrm{e}^x \tag{4.17}$$

例 5　$y = \mathrm{Arc}\sin x$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{4.18}$$

例 6　$y = \mathrm{Arc}\cos x$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{4.19}$$

例 7　$y = \mathrm{Arc}\tan x$

$$y' = \frac{1}{1 + x^2} \tag{4.20}$$

例 8　$y = \log |x|$

$$y' = \frac{1}{x} \tag{4.21}$$

例 9　$y = a^x$

$$y' = a^x \log a \tag{4.22}$$

## 4.2　テーラー展開

微分の定義式（4.1）において、$\Delta x$ が十分に小さいが有限の場合を考える。この時、

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c(x, \Delta x) \tag{4.23}$$

と置くと、

$$f(x+\Delta x) = f(x) + c(x, \Delta x)\Delta x \tag{4.24}$$

と書くことができる。この式は、微小区間 $\Delta x$ だけ離れたときの関数値の差を表すものと考えられる。ここで

$$c(x, 0) = f'(x) \tag{4.25}$$

であることを用いると、

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + O((\Delta x)^2) \tag{4.26}$$

と書かれる。ここで、$O((\Delta x)^2)$ は $(\Delta x)$ の 2 次以上の寄与を表しており、$\Delta x$ の 1 次までの近似では無視できる項である。すなわち、式 (4.26) は $(\Delta x)$ の 1 次までの近似である。

次に、$(\Delta x)$ の 2 次までの近似を求める。

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + d(x)(\Delta x)^2 + O((\Delta x)^3) \tag{4.27}$$

と置き、$x \to x + \Delta x$ とすると

$$\begin{aligned} f(x+2\Delta x) &= f(x+\Delta x) + f'(x+\Delta x)\Delta x + d(x+\Delta x)(\Delta x)^2 + O((\Delta x)^3) \\ &= f(x) + f'(x)(2\Delta x) + d(x)(2\Delta x)^2 + O((\Delta x)^3) \end{aligned} \tag{4.28}$$

を得る。

$$f'(x+\Delta x) = f'(x) + f''(x)\Delta x + O((\Delta x)^2) \tag{4.29}$$

$$d(x+\Delta x) = d(x) + d'(x)\Delta x + O((\Delta x)^2) \tag{4.30}$$

を用いると、

$$\begin{aligned} &f(x) + f'(x)\Delta x + d(x)(\Delta x)^2 + (f'(x) + f''(x)\Delta x)\Delta x + d(x)(\Delta x)^2 \\ =&f(x) + f'(x)(2\Delta x) + d(x)(2\Delta x)^2 \end{aligned} \tag{4.31}$$

より、

$$2d(x) + f''(x) = 4d(x) \to d(x) = \frac{1}{2}f''(x) \tag{4.32}$$

が得られる。このような手続きをくりかえすと、何回でも微分可能な関数 $f(x)$ に対して、

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) =&f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x)(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)(\Delta x)^3 \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)(\Delta x)^n + \cdots \\ =&\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}f^{(l)}(x)(\Delta x)^l \end{aligned} \tag{4.33}$$

が得られる。この式の右辺は無限級数であるため、$\Delta x$ の大きさはこの級数が収束する範囲に限られる。この式において、$x \to a$、$\Delta x = x - a$ と置くと

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} f^{(l)}(a)(x-a)^l \tag{4.34}$$

が得られる。これを、$x = a$ のまわりのテーラー展開（テーラー級数）とよぶ。特に、$a = 0$ の場合、すなわち $x = 0$ のまわりのテーラー展開をマクローリン展開という。

例 1　$f(x) = (1+x)^a$ のマクローリン展開

$$\begin{aligned} f'(x) &= a(1+x)^{a-1} \\ f''(x) &= a(a-1)(1+x)^{a-2} \\ f^{(n)}(x) &= a(a-1)\cdots(a-n+1)(1+x)^{a-n} \end{aligned} \tag{4.35}$$

なので、

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + \cdots \tag{4.36}$$

特に $a = -1$ と置くと

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \tag{4.37}$$

が得られる。

例 2　$f(x) = \mathrm{e}^x$ のマクローリン展開

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x \tag{4.38}$$

なので

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{4.39}$$

例 3　$f(x) = \sin x$ のマクローリン展開

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x \\ f^{(4)}(x) &= \sin x \\ f^{(2n)}(x) &= (-1)^n \sin x \\ f^{(2n+1)}(x) &= (-1)^n \cos x \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sin 0x^{2n} + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cos 0x^{2n+1}\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \qquad (4.40) \\
&= x - \frac{x^3}{3!}\cdots
\end{aligned}$$

例 4　$f(x) = \cos x$ のマクローリン展開

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\sin x \\
f''(x) &= -\cos x \\
f^{(3)}(x) &= \sin x \\
f^{(4)}(x) &= \cos x \\
f^{(2n)}(x) &= (-1)^n \cos x \\
f^{(2n+1)}(x) &= (-1)^{n+1}\sin x
\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cos 0x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\sin 0x^{2n+1}\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \qquad (4.41) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!}\cdots
\end{aligned}$$

例 5　$f(x) = \log(1+x)$ のマクローリン展開

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\
f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\
f^{(3)}(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{3\cdot 2}{(1+x)^4} \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}
\end{aligned}$$

なので、

$$
\begin{aligned}
\log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(-1)^{n-1}(n-1)!x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \cdots
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

なお、左辺を $x$ で微分すると $\dfrac{1}{1+x}$ のテーラー展開 (4.37) になっている。すなわち、ある関数のテーラー展開を微分すると微分した関数のテーラー展開が得られる。

## 4.3 積分の基礎事項

### 4.3.1 定積分

下図において、区間 $a \le x \le b$ で関数 $y = f(x)$ と $y = 0$ で決まる領域の面積 $S$ を求める。これを行うには、区間 $a \le x \le b$ を $n$ 等分し、$x_0 = a$、

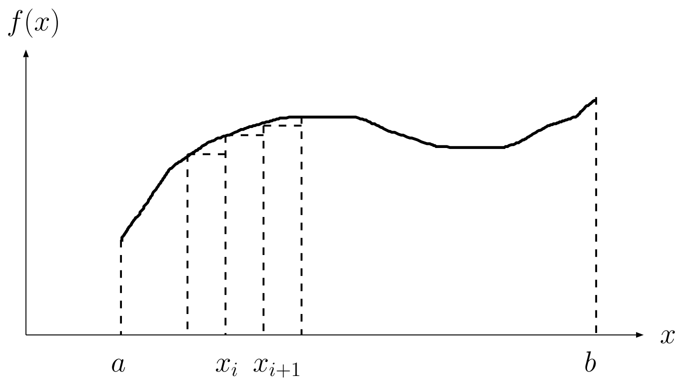


図 4.2:

$x_n = b$ とし、次のような計算を行えばよい。

$$
S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \tag{4.43}
$$

ただし、$\Delta x = (b-a)/n$ である。この極限を定積分といい、以下のように表す。

$$
S = \int_a^b f(x)dx \tag{4.44}
$$

定積分の性質は以下のとおりである。

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \tag{4.45}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{4.46}$$

$$\int_a^b \{Af(x) + Bg(x)\}\,dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b f(x)dx \tag{4.47}$$

### 4.3.2 不定積分

関数 $f(x)$ に対して、次を満たす関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という。

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \tag{4.48}$$

$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき、次が成り立つ。

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{4.49}$$

これを微積分学の基本定理という。証明は以下のとおりである。

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{\Delta x}\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} \{F(x_{i+1}) - F(x_i)\} \\
&= F(x_n) - F(x_0) \\
&= F(b) - F(a)
\end{aligned}$$

$F(x)$ は $f(x)$ の不定積分とも呼ばれ、$F(x) = \int f(x)dx$ と表される。

$$F(x) = \int f(x)dx \Longleftrightarrow \frac{d}{dx}F(x) = f(x) \tag{4.50}$$

$F(x)$ が $f(x)$ の不定積分であるとき、$\tilde{F}(x) = F(x) + C$ ($C$：定数) も $f(x)$ の不定積分である。この任意定数 $C$ は積分定数と呼ばれる。

不定積分の性質には以下のようなものがある。

- 部分積分

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \tag{4.51}$$

これは、積の微分より導かれる式

$$f'(x)g(x) = \frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) - f(x)g'(x)$$

の両辺を積分することによって示される。これを定積分へ適用すると

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx \tag{4.52}$$

となる。なお、右辺の第１項と第２項は以下のように表される。

$$\begin{aligned} f(b)g(b) - f(a)g(a) &= [f(x)g(x)]_a^b & (4.53) \\ &= f(x)g(x)|_a^b & (4.54) \end{aligned}$$

- 置換積分

$x = x(t)$ のとき

$$\int f(x)dx = \int f(x(t))\frac{dx}{dt}dt \tag{4.55}$$

証明は以下のとおりである。
$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F(x) = \int f(x)dx$ とする。$F(x(t))$ を $t$ で微分すると

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x(t)}\frac{dx}{dt} = f(x(t))\frac{dx}{dt} \tag{4.56}$$

両辺を $t$ で積分すると

$$\int f(x)dx = F(x) = F(x(t)) = \int f(x(t))\frac{dx}{dt}dt \tag{4.57}$$

が得られる。なお、これを定積分にすると、$a = x(\alpha)$、$b = x(\beta)$ として

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\frac{dx}{dt}dt \tag{4.58}$$

と書かれる。

# 第5章　多変数関数の微分と積分

多変数の関数、例えば、ある時刻$t$における空間的な温度分布$T(x,y,z,t)$、の微分と積分を考える。

## 5.1　偏微分

かんたんのため、2変数の場合を考える。2変数の関数$f(x,y)$は、1つの変数を固定すればもうひとつの変数の関数とみなすことができ、この変数で微分することができる。
$y$を固定して$x$で微分：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \tag{5.1}$$

$x$を固定して$y$で微分：

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \tag{5.2}$$

これらを偏微分（偏導関数）という。なお、偏微分の表し方として、

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_x, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \tag{5.3}$$

がある。特に3つめの表記は熱力学でよく用いられる。また、$(x_0,y_0)$における偏微分の値は

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0,y=y_0} = f_x(x_0,y_0) \tag{5.4}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x=x_0,y=y_0} = f_y(x_0,y_0) \tag{5.5}$$

のように書く。

高階の偏微分についても同様に定義される。２階の偏微分については

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} \tag{5.9}$$

である。$f_{xy}$ と $f_{yx}$ が存在してともに連続であるならば、$f_{xy} = f_{yx}$ である。物理に現れる量の２階の偏導関数は $f_{xy} = f_{yx}$ を満たすと考えてよい。この関係を用いることによって、熱力学のマックスウェルの関係式が導出される。

変数がさらに多い場合には、$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の $x_k$（$k = 1, 2, \cdots, n$）についての偏微分は

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, \cdots, x_k + \Delta x_k, \cdots, x_n) - f(x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_n)}{\Delta x_k} \tag{5.10}$$

で定義される。

例　１モルの理想気体の状態方程式は

$$pV = RT \tag{5.11}$$

で与えられる。ここで、$p$ は圧力、$V$ は体積、$T$ は絶対温度、$R$ は気体定数である。この時、定圧熱膨張率 $\beta$ と等温圧縮率 $\kappa$ は以下のように計算される。

$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{T} \tag{5.12}$$

$$\kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{p} \tag{5.13}$$

## 5.2　全微分

再び２変数の場合を考える。点 $(x, y)$ と点 $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ における関数の差を $\Delta f$ とする。

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= \underline{\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y} + \Delta x \text{ と } \Delta y \text{ についての２次以上の項}\end{aligned} \tag{5.14}$$

上式において、$\Delta x$ と $\Delta y$ についての 2 次以上の項を無視し、また $\Delta f \to df$、$\Delta x \to dx$、$\Delta y \to dy$ とした下線部を関数 $f$ の全微分といい、

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{5.15}$$

と書く。以下の式

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{5.16}$$

がある関数の全微分であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{5.17}$$

である。この時、(5.16) を完全微分であるという。同様に、

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \tag{5.18}$$

がある関数の全微分であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{5.19}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \tag{5.20}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \tag{5.21}$$

である。

例 以下の式

$$(3x^2 + 2xy - 2y^2)dx + (x^2 - 4xy)dy \tag{5.22}$$

がある関数 $f$ の完全微分であることを示し、$f$ を求める。

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy - 2y^2) = 2x - 4y \tag{5.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 4xy) = 2x - 4y \tag{5.24}$$

であるので、(5.22) は完全微分である。この時、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy - 2y^2$$

なので、$x$ で積分して

$$f(x,y) = x^3 + x^2y - 2xy^2 + h(y)$$

となる。ここで、$h(y)$ は $y$ のみの関数である。上式を $y$ で微分して

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 4xy + \frac{dh}{dy}$$

となり、$dh/dy = 0 \quad \leftrightarrow h = C$（$C$ は任意の定数）が得られる。したがって、

$$f(x,y) = x^3 + x^2y - 2xy^2 + C \tag{5.25}$$

となる。

合成関数の微分は以下のように与えられる。

$$z = z(x,y) \tag{5.26}$$
$$x = x(r,s) \tag{5.27}$$
$$y = y(r,s) \tag{5.28}$$

とする。ここで

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{5.29}$$
$$dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial s}ds \tag{5.30}$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial s}ds \tag{5.31}$$

であるので、

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial s}ds\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial s}ds\right) \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)dr + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds \\ &= \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial s}ds \end{aligned} \tag{5.32}$$

より、

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \tag{5.33}$$
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \tag{5.34}$$

となる。特に、$x$ と $y$ が 1 変数 $t$ の関数であるとき、すなわち $z = z(x(t), y(t))$ のとき

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{5.35}$$

となる。

以下の関係式を満たす $l$ 変数の関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_l)$ を $n$ 次の同次関数という。

$$f(ax_1, ax_2, \cdots, ax_l) = a^n f(x_1, x_2, \cdots, x_l) \tag{5.36}$$

ここで、$a$ は任意の定数である。たとえば、

$$f(x, y) = x^5 + 4x^4 y - 2x^3 y^2 + 3x^2 y^3 + 7xy^4 - y^5 \tag{5.37}$$

は５次の同次関数である。同次関数の定義式（5.36）の両辺を $a$ で微分すると、

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{\partial}{\partial X_i} f(X_1, X_2, \cdots, X_l)\bigg|_{X_i = ax_i} \frac{\partial (ax_i)}{\partial a} = na^{n-1} f(x_1, x_2, \cdots, x_l) \tag{5.38}$$

となるが、上式に $a = 1$ を代入すると、

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = nf \tag{5.39}$$

が得られる。これをオイラーの定理という。

例 式 (5.37) において、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 + 16x^3 y - 6x^2 y^2 + 6xy^3 + 7y^4 \tag{5.40}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^4 - 4x^3 y + 9x^2 y^2 + 28xy^3 - 5y^4 \tag{5.41}$$

なので、

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y = 5f \tag{5.42}$$

が成り立つ。

多変数関数のテーラー展開は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y) &= f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f \end{aligned} \tag{5.43}$$

ここで、二項定理より、

$$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r(\Delta x)^r(\Delta y)^{n-r}\frac{\partial^r}{\partial x^r}\frac{\partial^{n-r}}{\partial y^{n-r}} \tag{5.44}$$

である。例えば

$$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)=\Delta x\frac{\partial f}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial f}{\partial y} \tag{5.45}$$

$$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)=(\Delta x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+(\Delta y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{5.46}$$

である。

例　3つの変数 $x$、$y$、$z$ に関数関係があるとき、

$$z=z(x,y) \tag{5.47}$$

とすると

$$dz=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy \tag{5.48}$$

が得られる。ここで $x=x(y,z)$ とすると、上式は

$$0=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \tag{5.49}$$

となる。これを整理すると

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x=-1 \tag{5.50}$$

となる。ここで

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x=1/\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \tag{5.51}$$

を用いた。

## 5.3　多重積分

### 5.3.1　2重積分と3重積分

前章で述べたように、1変数の積分は級数の極限として以下のように定義されている。

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x \tag{5.52}$$

ここで、区間 $a \leq x \leq b$ は $(a, x_1), (x_1, x_2), \cdots, (x_{n-1}, b)$ と $n$ 等分され、$x_0 = a$、$x_n = b$ である。これを、2 変数の場合に拡張する。$xy$ 平面の領

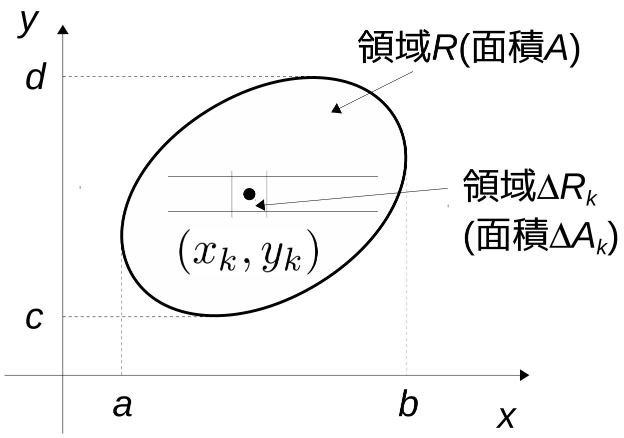


図 5.1:

域 $R$（面積 $A$）で定義された 1 価連続な関数を $F(x, y)$ とする。領域 $R$ を $n$ 個（$\Delta R_1, \Delta R_2, \cdots, \Delta R_n$）の微小な領域に分割し、以下のような和を考える。

$$\sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k) \Delta A_k \tag{5.53}$$

ここで、$(x_k, y_k)$ は微小領域 $\Delta R_k$ 内の点であり、$\Delta A_k$ は $\Delta R_k$ の面積である。2 重積分はこの和の $n \to \infty$ の極限として定義される。

$$\iint_R F(x, y) dxdy \equiv \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k) \Delta A_k \tag{5.54}$$

実際の積分は、積分を 2 回繰り返して計算する。これを累次積分という。図 5.2 の左のように、$x$ を固定した時の $y$ の最大値 $y = g(x)$、最小値 $y = f(x)$ とする。2 重積分は、まず $x$ を固定し $y$ について $f(x)$ から $g(x)$ まで積分し、その後 $x$ について $a$ から $b$ まで積分することによって計算される。

$$\iint_R F(x, y) dxdy = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy F(x, y) \tag{5.55}$$

もちろん、積分の順序を入れ替えることも可能である。

$$\iint_R F(x, y) dxdy = \int_c^d dy \int_{l(y)}^{h(y)} dy F(x, y) \tag{5.56}$$

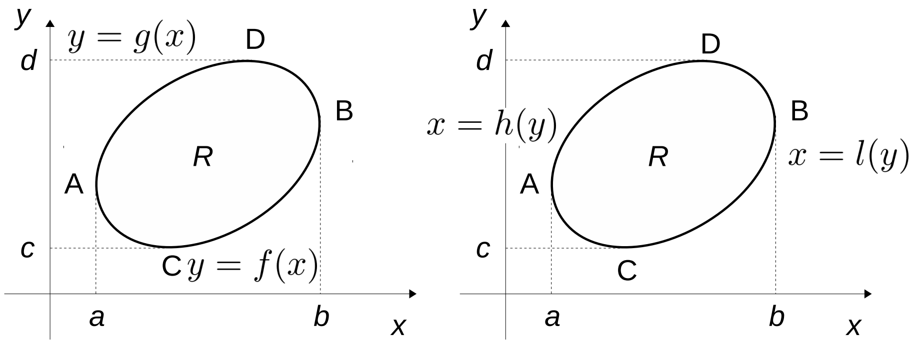


図 5.2:

ここで、$l(y)$ および $h(y)$ は $y$ を固定した場合の $x$ の最大値と最小値である（図 5.2 右参照）。

例 領域 $R$：$0 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 1$、$x \geq 0$、$y \geq 0$ での積分。

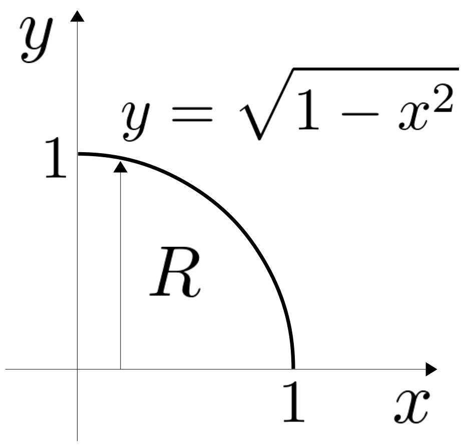


図 5.3:

$x$ を固定した時、$0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ なので

$$\iint_R dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{\pi}{4} \tag{5.57}$$

$$\iint_R xdxdy = \int_0^1 dxx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{1}{3} \tag{5.58}$$

$$\iint_R y^2dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2dy = \frac{\pi}{16} \tag{5.59}$$

3重積分も同様に定義される。3次元の領域 $R$ を体積 $\Delta V_k$ の $n$ 個の微小領域にする。それを用いて、3重積分は以下のとおり定義される。

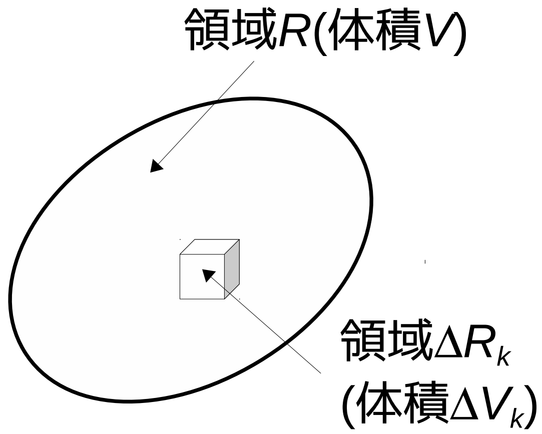


図 5.4:

$$\iiint_R F(x,y,z)dxdydz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} F(x_k,y_k,z_k)\Delta V_k \tag{5.60}$$

ここで $(x_k, y_k, z_k)$ は微小領域 $\Delta R_k$ 内の点である。

### 5.3.2 極座標と円筒座標

2（3）次元空間での位置は2（3）つの実数を使って指定される。直交座標系でこれらの変数を指定する代わりに、極座標を用いて指定する方が多重積分を実行しやすい場合がある。

まず、2次元の場合を考える。空間の位置を指定するために $(x, y)$ ではなく、図 5.5(a) の $(r, \theta)$ を用いる。ただし、

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \tag{5.61}$$

$$\Leftrightarrow\ r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$(0 \le r < \infty, \quad 0 \le \theta < 2\pi) \tag{5.62}$$

それでは、2重積分を2次元極座標を用いて表す。図 5.5(b) より、微小面積 $dA = dxdy$ は

$$dA = rdrd\theta \tag{5.63}$$

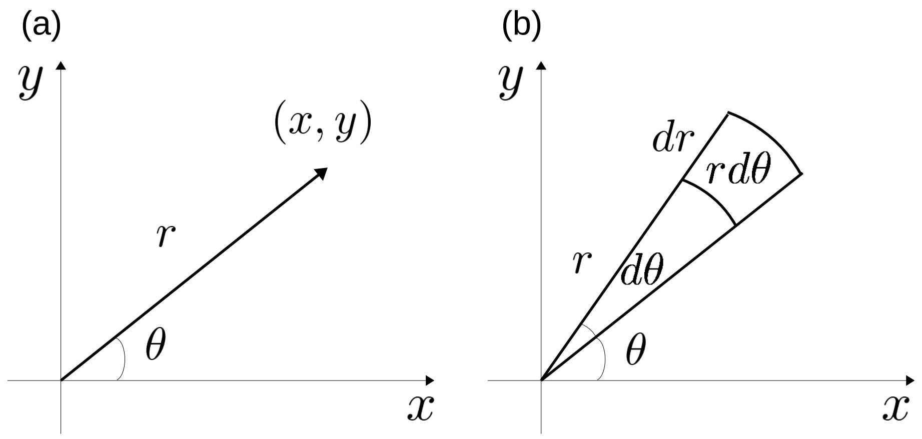


図 5.5: ２次元極座標 (a) と微小面積 (b)。

と表されるので、２重積分は

$$\iint_R F(x, y) dx dy = \iint_R F(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta \tag{5.64}$$

によって表される。

例１　領域 $R$：$0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$、$x \geq 0$、$y \geq 0$ での積分。
$0 \leq \theta \leq \pi/2$、$0 \leq r \leq 1$ なので

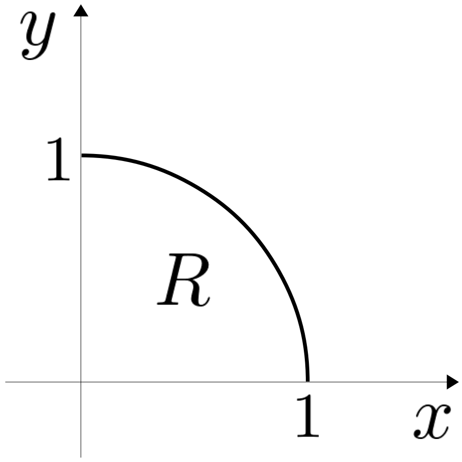


図 5.6:

$$\iint_R dxdy = \int_0^1 rdr \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{4} \tag{5.65}$$

$$\iint_R xdxdy = \int_0^1 r^2 dr \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta = \frac{1}{3} \tag{5.66}$$

$$\iint_R y^2 dxdy = \int_0^1 r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta = \frac{\pi}{16} \tag{5.67}$$

なお、最後の積分は対称性を用いて

$$\iint_R y^2 dxdy = \frac{1}{2}\iint_R (x^2+y^2)dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1 r^3 dr \int_0^{\pi/2} d\theta \tag{5.68}$$

からも簡単に計算できる。

例 2 以下の積分をガウス積分という。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{5.69}$$

ただし、$a > 0$ とする。この積分は 2 次元の極座標を用いて以下のように証明される。この積分の 2 乗 $I^2$ を計算すると

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left\{-a(x^2+y^2)\right\} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} drr \exp(-ar^2) \\ &= \pi \int_0^{\infty} dx \exp(-ax) \\ &= \frac{\pi}{a} \end{aligned} \tag{5.70}$$

となる。$I > 0$ なので、式 (5.69) が得られる。

3 次元の場合は図 5.7 より

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad y = r\cos\theta \tag{5.71}$$

$$\Leftrightarrow\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \qquad \tan\phi = \frac{y}{x}$$

$$(0 \le r < \infty, \quad 0 \le \theta < \pi, \quad 0 \le \phi < 2\pi) \tag{5.72}$$

という関係式が成り立つ。微小体積 $dV$ は

$$dV = r^2 \sin\theta drd\theta d\phi \tag{5.73}$$

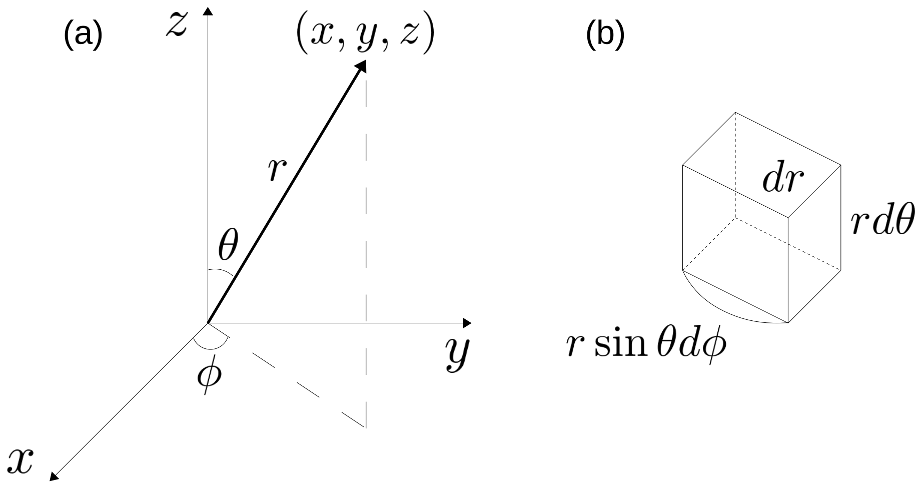


図 5.7: 3次元極座標 (a) と微小体積 (b)。

で表されるので、3重積分を極座標で表すと

$$\iiint_R F(x,y,z)dxdydz = \iiint_R F(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\phi \tag{5.74}$$

となる。

例1 半径 $a$ の一様な電荷分布をしている球が原点から $R$ だけ離れた距離の位置に作る静電ポテンシャル。

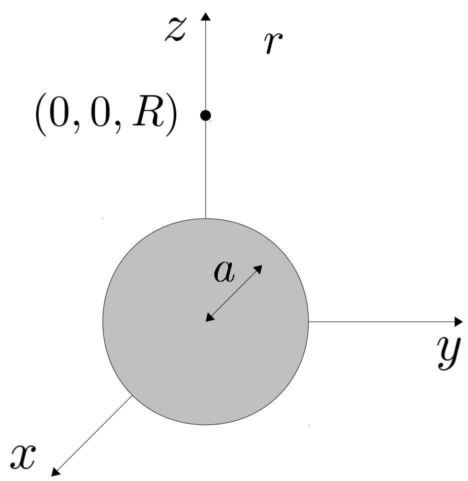


図 5.8:

$$
\begin{aligned}
U(R) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint dxdydz\frac{\rho}{\sqrt{x^2+y^2+(z-R)^2}} \\
&= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_0^a dr\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} d\phi\frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{r^2-2Rr\cos\theta+R^2}} \\
&= \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & \cdots R>a\text{ の場合} \\ \dfrac{Q}{8\pi\epsilon_0 a}\left(3-\dfrac{R^2}{a^2}\right) & \cdots R<a\text{ の場合} \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.75}
$$

ただし、$\rho$ は電荷密度であり、全電荷 $Q$ を用いて

$$
\rho = \frac{Q}{4\pi a^3/3} \tag{5.76}
$$

である。

例 2　前問で電荷が球の表面に一様分布している場合

$$
\begin{aligned}
U(R) &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} d\phi\frac{a^2\sin\theta}{\sqrt{a^2-2Ra\cos\theta+R^2}} \\
&= \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & \cdots R>a\text{ の場合} \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} & \cdots R<a\text{ の場合} \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.77}
$$

ただし、$\sigma$ は面電荷密度であり、全電荷 $Q$ を用いて

$$
\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2} \tag{5.78}
$$

である。

# 第6章　複素数

2次方程式 $x^2+1=0$ の解を考えてみよう。$x$ を実数とするならば、$x^2+1 \geq 1 > 0$ なので、解は存在しない。しかしながら、$\mathrm{i}^2=-1$ となる数を導入することによって解が存在することとなる。すなわち、

$$x^2+1=0 \leftrightarrow x=\pm\mathrm{i} \tag{6.1}$$

このように導入された数 $i$ を虚数単位という。

複素数 $z$ は、2つの実数 $a$ と $b$、そして虚数単位 i を用いて以下のように表される。

$$z=a+\mathrm{i}b \tag{6.2}$$

このとき、$a$ を複素数 $z$ の実部（または実数部分）、$b$ を複素数 $z$ の虚部（または虚数部分）といい、

$$a=\mathrm{Re}z \tag{6.3}$$
$$b=\mathrm{Im}z \tag{6.4}$$

と書く。特に、$a=0$ の時、すなわち

$$z=\mathrm{i}b \tag{6.5}$$

を純虚数という。また、$\sqrt{a^2+b^2}$ を $z$ の絶対値といい、$|z|$ と表す。

複素数の演算は以下のように定義される。

1. $a+\mathrm{i}b=0$ ならば、$a=b=0$

2. $a_1+\mathrm{i}b_1=a_2+\mathrm{i}b_2$ ならば、$a_1=a_2$、$b_1=b_2$

3. 和

$$(a+\mathrm{i}b)+(c+\mathrm{i}d)=(a+c)+\mathrm{i}(b+d)$$

4. 差

$$(a+\mathrm{i}b)-(c+\mathrm{i}d)=(a-c)+\mathrm{i}(b-d)$$

5. 積

$$
\begin{aligned}
(a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d) &= ac + \mathrm{i}ad + \mathrm{i}bc + \mathrm{i}^2 bd \\
&= (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)
\end{aligned}
$$

6. 商

$$
\begin{aligned}
\frac{a+\mathrm{i}b}{c+\mathrm{i}d} &= \frac{a+\mathrm{i}b}{c+\mathrm{i}d} \times \frac{c-\mathrm{i}d}{c-\mathrm{i}d} \\
&= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \mathrm{i}\frac{bc-ad}{c^2+d^2}
\end{aligned}
$$

これらより、複素数に対しても、実数同様、以下の演算則が成り立つ。

1. 交換則

$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 \\
z_1 z_2 &= z_2 z_1
\end{aligned}
$$

2. 結合則

$$
\begin{aligned}
(z_1 + z_2) + z_3 &= z_1 + (z_2 + z_3) \\
(z_1 z_2) z_3 &= z_1 (z_2 z_3)
\end{aligned}
$$

3. 分配則

$$
z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3
$$

また、$z = a + \mathrm{i}b$ に対して、

$$
z^* \equiv a - \mathrm{i}b = \bar{z} \tag{6.6}
$$

を共役複素数（複素共役）という。これを用いると

$$
|z|^2 = a^2 + b^2 = zz^* \tag{6.7}
$$

$$
a = \frac{z + z^*}{2} \tag{6.8}
$$

$$
b = \frac{z - z^*}{2\mathrm{i}} \tag{6.9}
$$

また、$z^{-1}$ は

$$
\begin{aligned}
z^{-1} &= \frac{1}{z} \\
&= \frac{1}{z} \times \frac{z^*}{z^*} \\
&= \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2+b^2}
\end{aligned} \tag{6.10}
$$

で与えられる。

　複素数は座標平面上の点と対応させることができる。平面上に $x$-$y$ 直交座標系をとり、その座標が $(a, b)$ であるような点を複素数 $z = a + \mathrm{i}b$ と対応させるのである。このように、複素数を表すために用いる平面を複素平

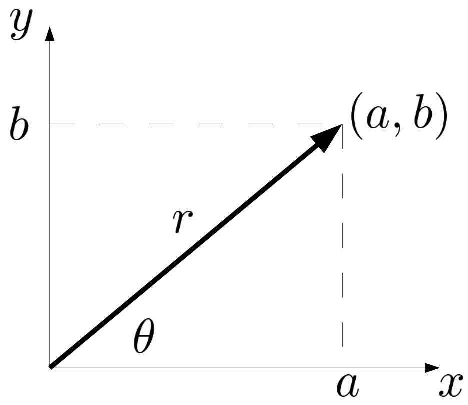


図 6.1:

面またはガウス平面という。また、複素平面の $x$ 軸のことを実軸、$y$ 軸のことを虚軸という。図 6.1 のように、$r$ と $\theta$ をとると、

$$a = r\cos\theta \tag{6.11}$$

$$b = r\sin\theta \tag{6.12}$$

が成り立つので、

$$z = a + \mathrm{i}b = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \tag{6.13}$$

となる。これを $z$ の極形式といい、$r$ を $z$ の絶対値 $(= |z|)$、$\theta$ を $z$ の偏角 $(= \arg z)$ という。

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{6.14}$$

$$\arg z = \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} \tag{6.15}$$

ここで、指数関数のテーラー展開

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

を用いると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\mathrm{i}\theta)^n \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \frac{\mathrm{i}^{2l}}{(2l)!}\theta^{2l} + \frac{\mathrm{i}^{2l+1}}{(2l+1)!}\theta^{2l+1} \right\} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!}\theta^{2l} + \mathrm{i}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!}\theta^{2l+1} \\
&= \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \qquad (6.16)
\end{aligned}
$$

が得られる。これをオイラーの公式という。オイラーの公式を用いると

$$
z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \qquad (6.17)
$$

と書ける。

（注）観測にかかる量は全て実数である。ニュートン力学や電磁気学では、現れる量は全て実数であり、複素数を導入する必然的な理由はない。しかしながら、後で示すように複素数を用いると計算が簡単になったりする。一方、量子力学では複素数を取り扱うことが本質的である。

オイラーの公式を用いると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)} &= \cos(\theta+\phi) + \mathrm{i}\sin(\theta+\phi) \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \\
&= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi) \\
&= \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi + \mathrm{i}\,(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) \qquad (6.18)
\end{aligned}
$$

となり、三角関数の和の公式

$$
\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi \qquad (6.19)
$$

$$
\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi \qquad (6.20)
$$

が導出できる。

微分方程式を複素数を用いて解いてみる。まず、一次元調和振動子の微分方程式

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= -kx \\
\leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega^2 x \qquad (6.21)
\end{aligned}
$$

を考える。ただし、$\omega = \sqrt{k/m}$ である。以下に示すように $x$ と $y$ が上式の解であるならば、$z = x + \mathrm{i}y$ も解となっている。

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{d^2}{dt^2}(x + \mathrm{i}y) \\
&= \frac{d^2 x}{dt^2} + \mathrm{i}\frac{d^2 y}{dt^2} \\
&= -\omega^2 (x + \mathrm{i}y) \\
&= -\omega^2 z
\end{aligned}
$$

したがって、一次元調和振動子の微分方程式の解を得るには上式を満たすような複素数を求めればよいことになる。ただし、物理的に意味があるのはその実部または虚部である。式 (6.22)、$z = \mathrm{e}^{\lambda t}$ を代入すると、

$$
\begin{aligned}
&\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t} = -\omega^2 \mathrm{e}^{\lambda t} \\
&\therefore \lambda^2 + \omega^2 = 0 \to \lambda = \pm \mathrm{i}\omega \qquad (6.22)
\end{aligned}
$$

となるので、$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ および $z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ が解となっている。一般解は、複素定数 $C_1$、$C_2$ を用いて

$$
z = C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + C_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \qquad (6.23)
$$

で与えられるので、その実部をとると

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}(z + z^*) \\
&= \frac{1}{2}\left\{(C_1 + C_2^*)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + (C_1^* + C_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{(C_1 + C_2 + C_1^* + C_2^*)\cos\omega t + \mathrm{i}(C_1 - C_2 - C_1^* + C_2^*)\sin\omega t\right\} \\
&= A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad (6.24)
\end{aligned}
$$

となる。ここで $A$ および $B$ は実数である。

次に、連立微分方程式

$$
\frac{dx}{dt} = \alpha y \qquad (6.25)
$$

$$
\frac{dy}{dt} = -\alpha x \qquad (6.26)
$$

を解く。$z = x + \mathrm{i}y$ を定義すると、$z$ の満たすべき方程式は

$$
\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{d}{dt}(x + \mathrm{i}y) \\
&= \alpha y + \mathrm{i}(-\alpha x) \\
&= -\mathrm{i}\alpha z \qquad (6.27)
\end{aligned}
$$

で与えられる。上の方程式の解は $z = C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha t}$（$C$ は任意の複素定数）であるので、$C = A + \mathrm{i}B$ とおいて、オイラーの公式を用いると、

$$
\begin{aligned}
x + \mathrm{i}y &= (A + \mathrm{i}B)(\cos\alpha t - \mathrm{i}\sin\alpha t) \\
&= A\cos\alpha t + B\sin\alpha t + \mathrm{i}(-A\sin\alpha t + B\cos\alpha t)
\end{aligned}
\tag{6.28}
$$

より、

$$
x = A\cos\alpha t + B\sin\alpha t \tag{6.29}
$$

$$
y = -A\sin\alpha t + B\cos\alpha t \tag{6.30}
$$

が得られる。

なお、複素数を使わずに解くと以下のようになる。式 (6.25) を $t$ で微分し、式 (6.26) を代入すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt} &= \alpha\frac{dy}{dt} \\
&= -\alpha^2 x
\end{aligned}
\tag{6.31}
$$

が得られる。したがって、

$$
\begin{aligned}
x &= A\cos\alpha t + B\sin\alpha t \\
y &= \frac{1}{\alpha}\frac{dx}{dt} \\
&= -A\sin\alpha t + B\cos\alpha t
\end{aligned}
\tag{6.32}
$$

となる。

複素数 $z$ を複素数 $w$ に対応させる関数

$$
w = f(z) \tag{6.33}
$$

を複素関数という。本講義では、複素関数は取り扱わない。複素関数はそれだけで大変美しい学問体系であるが、自然科学へ応用という意味においても重要な分野である。

# 第７章　常微分方程式入門

変数 $x$ とその関数 $y$ および $y$ の微分 $y'$、$y''$、$\cdots$、$y^{(n)}$ の間の関係式、

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0 \Leftrightarrow y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}) \quad (7.1)$$

を $n$ 階の常微分方程式という。”常微分方程式を解く ”とは上記の関係式をみたす $y = y(x)$ を求めることであり、$y = y(x)$ を常微分方程式の解または積分という。$n$ 階の常微分方程式の解は一般に $n$ 個の未知定数を含む。このような解を一般解という。これらの未知定数は $n$ 個の条件、たとえば、$x = x_0$ における値 $y(x_0)$、$y'(x_0)$、$y''(x_0)$、$\cdots$、$y^{(n-1)}(x_0)$ によって決定される。本章では、簡単な１階の常微分方程式および２階の常微分方程式の解法を紹介する。

## 7.1　１階の常微分方程式

１階の常微分方程式は以下のように与えられる。

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (7.2)$$

上式の右辺の関数が以下のような特別な場合には、簡単に一般解を得ることができる。

### 7.1.1　変数分離型

１階の常微分方程式が

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad (7.3)$$

と書けるとき、これを変数分離型という。式（7.3）を以下のように変形し

$$g(y)dy = f(x)dx$$

両辺を積分することにより解が得られる。

$$\int_{y_0}^{y} g(y')dy' = \int_{x_0}^{x} f(x')dx'$$

例

$$\frac{dy}{dx} = x(1-y) \tag{7.4}$$
$$\frac{dy}{dx} = \mu y(1-y/K) \qquad (\mu \text{ と } K \text{ は定数}) \tag{7.5}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{7.6}$$

### 7.1.2 同次型

同次型とは次のような形の１階の常微分方程式である。

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{7.7}$$

この方程式は $y = ux$ とおくと、$y' = u'x + u$ なので

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x} \tag{7.8}$$

となり、変数分離型に帰着される。なお、$P(x, y)$ と $Q(x, y)$ がともに $n$ 次の同次関数である時、

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n P(x, y)$$
$$Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n Q(x, y)$$

が成り立つので、$\lambda = x^{-1}$ とおくと、

$$P(x, y) = x^n P(1, y/x)$$
$$Q(x, y) = x^n Q(1, y/x)$$

となり、関数 $P(x, y)/Q(x, y)$ は以下のように、

$$\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{P(1, y/x)}{Q(1, y/x)} \equiv f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{7.9}$$

$y/x$ の関数となる。

例

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} \tag{7.10}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - y^2}{2xy} \tag{7.11}$$

### 7.1.3 線型微分方程式

次のような形の微分方程式を線型微分方程式という。

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{7.12}$$

ここで、$P(x)$ および $Q(x)$ は $x$ の任意の関数である。この式が ”線型 ”と言われるのは、$y$ および $dy/dx$ についての１次式（線型）だからである。なお、$Q(x) = 0$ の時同次方程式または斉次方程式、$Q(x) \neq 0$ の時非同次方程式または非斉次方程式という。線型微分方程式の解は以下のように求められる。

1. $Q(x) = 0$ の場合
   この場合、式（7.12）は以下のように積分できる。

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{dy}{y} = -P(x)dx \\ \Leftrightarrow &y = A\exp\left(-\int^x dx' P(x')\right) \end{aligned} \tag{7.13}$$

   ここで、$A$ は任意の定数である。この式は、未知定数を１つ含むので同次方程式の一般解である。

2. $Q(x) \neq 0$ の場合
   この場合は、式（7.13）の定数 $A$ を $x$ の関数 $A(x)$ とみなす。

$$y = A(x)\exp\left(-\int^x dx' P(x')\right) \tag{7.14}$$

   この式を非同次方程式（7.12）に代入すると、$A(x)$ が満たすべき方程式が得られ、それは簡単に積分できる。

$$\begin{aligned} \frac{dA(x)}{dx} &= Q(x)\exp\left(\int^x dx' P(x')\right) \\ \Leftrightarrow A(x) &= \int^x dx' Q(x')\exp\left(\int^{x'} dx'' P(x'')\right) + A_1 \end{aligned} \tag{7.15}$$

   ここで、$A_1$ は未知定数である。その結果、非同次方程式の一般解は

以下のように与えられる。

$$y = \left\{ \int^x dx' Q(x') \exp\left( \int^{x'} dx'' P(x'') \right) + A_1 \right\} \exp\left( - \int^x dx' P(x') \right) \tag{7.16}$$

$$= A_1 \exp\left( - \int^x dx' P(x') \right) + \int^x dx' Q(x') \exp\left( \int^{x'} dx'' P(x'') \right) \exp\left( - \int^x dx' P(x') \right) \tag{7.17}$$

上式の第１項は同次方程式の一般解に他ならない。一方第２項は非同次方程式の特解である。したがって、非同次方程式の一般解は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} &\text{非同次方程式の一般解} \\ &= \text{同次方程式の一般解} + \text{非同次方程式の特解} \end{aligned} \tag{7.18}$$

この関係式は高階の微分方程式でもなりたつ。また、この導出で用いられた方法は定数変化法とよばれ、高階の非同次微分方程式を解く際にも有用な方法である。上に述べた一般解に関する事項により、（定数変化法にこだわらず）何らかの方法で特解が求まれば、それから非同次方程式の解を作ることができる。

例 コイルと抵抗をつないだ回路の方程式

$$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = V(t) \tag{7.19}$$

ただし、$V(t)$ は以下の関数であり

$$V(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V_0 & 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases} \tag{7.20}$$

初期条件は $I(0) = 0$ とする。

### 7.1.4 完全微分形

微分方程式

$$\begin{aligned} &P(x,y) + Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \\ \Leftrightarrow &P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \end{aligned} \tag{7.21}$$

において、

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{7.22}$$

の関係式が成り立っているものとする。この場合には、

$$P(x,y) = \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} \tag{7.23}$$

$$Q(x,y) = \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y} \tag{7.24}$$

とかけるので、式（7.21）の左辺は以下のように完全微分で表される。

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}dy = d\Phi(x,y) \tag{7.25}$$

したがって、式（7.21）の解は $d\Phi = 0$ より、

$$\Phi(x,y) = C \qquad （C \text{ は定数}） \tag{7.26}$$

と表される。$\Phi(x,y)$ は以下のような手順で求められる。式（7.23）および（7.24）より、

$$\begin{aligned}
\Phi(x,y) &= \int_{x_0}^{x} dx' P(x',y) + Y(y) \\
Q(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \int_{x_0}^{x} dx' \frac{\partial P(x',y)}{\partial y} + \frac{dY}{dy} \\
&= \int_{x_0}^{x} dx' \frac{\partial Q(x',y)}{\partial x'} + \frac{dY}{dy} \\
&= Q(x,y) - Q(x_0,y) + \frac{dY}{dy} \\
\frac{dY}{dy} &= Q(x_0,y) \\
Y(y) &= \int_{y_0}^{y} dy' Q(x_0,y') + C \\
\Phi(x,y) &= \int_{x_0}^{x} dx' P(x',y) + \int_{y_0}^{y} dy' Q(x_0,y') + \Phi(x_0,y_0) \qquad (7.27)
\end{aligned}$$

同様にして

$$\Phi(x,y) = \int_{y_0}^{y} dy' Q(x,y') + \int_{x_0}^{x} dx' P(x',y_0) + \Phi(x_0,y_0) \tag{7.28}$$

となる。これらの解は下図のような経路で積分したことに対応する。

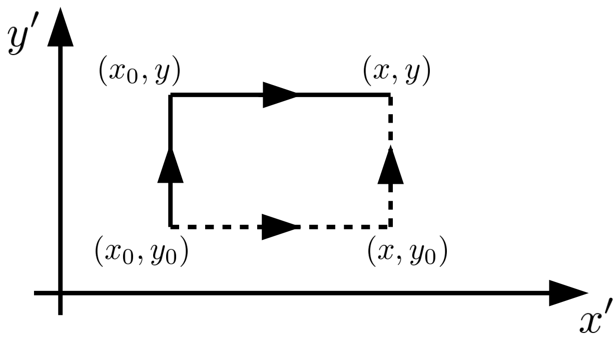


図 7.1: 式（7.27）に対応する積分経路（実線）および式（7.28）に対応する積分経路（点線）。

例

$$(Ax+By)dx+(Bx+Cy)dy=0 \qquad (A、B、C \text{ は定数}) \tag{7.29}$$

$$y\sin x dx-\cos x dy=0 \tag{7.30}$$

なお、$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ が完全微分形でなくても

$$\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy=0 \tag{7.31}$$

が完全微分形となるような $\mu(x,y)$ が見つかる場合がある。この関数 $\mu(x,y)$ を積分因子という。この場合には、同様の方法で解を見つけることができる。

## 7.2　定数係数の２階の常微分方程式

本節では２階の常微分方程式の解法について解説する。特に、物理によく現れる定数係数の２階の常微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=r(x) \qquad (p、q \text{ は定数}) \tag{7.32}$$

を取り扱う。

### 7.2.1　同次方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0 \tag{7.33}$$

の解を $\exp(\lambda x)$ と置く。すると上式に代入することにより、$\lambda$ は次の 2 次方程式（特性方程式）を満たすことがわかり、その解は以下のように与えられる。

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{7.34}$$

$$\lambda = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \equiv \lambda_\pm \tag{7.35}$$

一般解を

$$y = \exp(\lambda_+ x) z(x) \tag{7.36}$$

とおき、式（7.33）に代入すると、$z$ は以下の方程式を満たすことがわかる。

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + (\lambda_+ - \lambda_-)\frac{dz}{dx} = 0 \tag{7.37}$$

この方程式を解くと、

$$z = \begin{cases} a + bx & \cdots \lambda_+ = \lambda_- = \lambda \\ \frac{b}{\lambda_- - \lambda_+} \exp\{-(\lambda_+ - \lambda_-)x\} + a & \cdots \lambda_+ \neq \lambda_- \end{cases} \tag{7.38}$$

が得られる。ここで、$a$、$b$ は定数である。したがって、式（7.33）の一般解は

$$y = \begin{cases} (a + bx)\exp(\lambda x) & \cdots \lambda_+ = \lambda_- = \lambda \\ a\exp(\lambda_+ x) + b\exp(\lambda_- x) & \cdots \lambda_+ \neq \lambda_- \end{cases} \tag{7.39}$$

となる。以下で、この解の性質を検討する。

- $p^2 - 4q > 0$ の場合
  この場合には、$\lambda_+$ と $\lambda_-$ は異なる実数となる。このとき、一般解は

$$y = a\exp\left(-p/2 + \sqrt{p^2 - 4q}/2\right)x + b\exp\left(-p/2 - \sqrt{p^2 - 4q}/2\right)x \tag{7.40}$$

$$= \exp(-px/2)\left\{A\cosh\left(\sqrt{(p/2)^2 - q}x\right) + B\sinh\left(\sqrt{(p/2)^2 - q}x\right)\right\} \tag{7.41}$$

- $p^2 - 4q = 0$ の場合
  この場合には、$\lambda = -p/2$ となる。したがって、

$$y = (a + bx)\exp(-px/2) \tag{7.42}$$

  である。

- $p^2 - 4q < 0$ の場合
  この場合には、$\lambda_+$ と $\lambda_-$ は異なる複素数である。

$$\lambda_\pm = -\frac{p}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4q - p^2} \tag{7.43}$$

このとき、一般解は

$$y = a \exp\left(-p/2 + \mathrm{i}\sqrt{4q - p^2}/2\right) x + b \exp\left(-p/2 - \mathrm{i}\sqrt{4q - p^2}/2\right) x \tag{7.44}$$

$$= \exp\left(-px/2\right)\left\{C \cos\left(\sqrt{q - (p/2)^2}x\right) + D \sin\left(\sqrt{q - (p/2)^2}x\right)\right\} \tag{7.45}$$

問題　摩擦のある調和振動子の運動方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \tag{7.46}$$

を初期条件 $x(0) = x_0$、$v(0) = 0$ の元で解け。ただし、$\gamma > 0$、$\omega > 0$ とする。

解答

### 7.2.2　非同次方程式

非同次方程式の一般解は、１階の微分方程式の場合と同様、同次方程式の一般解と非同次方程式の特解の和で与えられる。本節では、非同次方程式の特解を求める一般論を展開することはせず（もちろん一般論は存在する）、ケースバイケースで特解を求める方法を紹介する。なお、以下では特解を $Y(x)$ と記す。

- $r(x) = Ax^n$（$A$：定数）の場合

$$Y(x) = a_0 x^n + a_1 x - n - 1 + \cdots + a_n \tag{7.47}$$

とおいて、係数を逐次的に決める。

例

$$y'' - 4y' + 3y = x \tag{7.48}$$

- $r(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$ の場合

$$Y(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x \tag{7.49}$$

とおく。

例

$$y'' - 4y' + 3y = \cos x \tag{7.50}$$

- $r(x) = A\mathrm{e}^{kx}$（$k^2 + pk + q \neq 0$）の場合

$$Y(x) = a\mathrm{e}^{kx} \tag{7.51}$$

とおいて、定数 $a$ を定めると、

$$Y(x) = \frac{A}{k^2 + pk + q}\mathrm{e}^{kx} \tag{7.52}$$

となる。

- $r(x) = A\mathrm{e}^{kx}$（$k^2 + pk + q = 0$）の場合

$$Y(x) = ax\mathrm{e}^{kx} \tag{7.53}$$

とおいて、定数 $a$ を定めると、

$$Y(x) = \frac{Ax}{p + 2k}\mathrm{e}^{kx} \tag{7.54}$$

となる。

例　以下の微分方程式の特解を求めよ。

$$y'' - 3y' + 2y = 2\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{3x} \tag{7.55}$$

$$y'' + y = \sin x \tag{7.56}$$

問題　強制振動の微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = A\sin\Omega t \tag{7.57}$$

を解け。ただし、初期条件は $x(0) = v(0) = 0$ とする。

解答

# 第8章　ベクトル

## 8.1　定義

　物理の中に現れる量のうち、大きさと方向の両方によって指定される量をベクトルという。一方、大きさだけで指定される量をスカラーという。ベクトルの例としては、速度や加速度、力、電場や磁場などがある。スカラーの例として、質量や温度などがあげられる。

　ベクトルは、その長さが大きさに比例し、方向がベクトルの向きと一致する矢によって図示される。文字で表すには、$\boldsymbol{A}$ のように太字を用いるか $\vec{A}$ のように文字の上に矢印をつける。ベクトルの大きさは絶対値の記号をつけて $|\boldsymbol{A}|$ と書くか、または単に文字 $A$ と書く。特に、始点と終点をはっきりとさせる場合には矢の始点と終点を明記する。下図の場合には、ベクトル $\boldsymbol{A}$ は $\vec{PQ}$ とも書かれる。

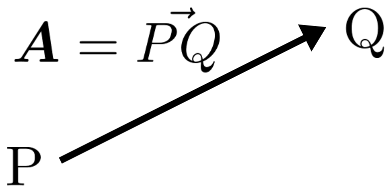


図 8.1:

　ベクトルの代数をまとめておく。

1. ２つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が、同じ大きさと同じ方向をもつならばそれらは等しいと定義される。始点と終点が異なっていても構わない。

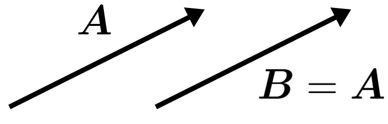


図 8.2:

2. $\boldsymbol{A}$ と同じ大きさをもつが方向が反対のベクトルを $-\boldsymbol{A}$ と定義する。

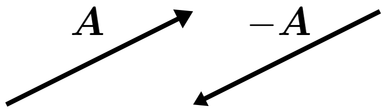


図 8.3:

3. $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の和 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ は、$\boldsymbol{A}$ の終点に $\boldsymbol{B}$ の始点をおき、$\boldsymbol{A}$ の始点と $\boldsymbol{B}$ の終点をつないで得られる。ベクトル $\boldsymbol{C}$ は、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を辺と

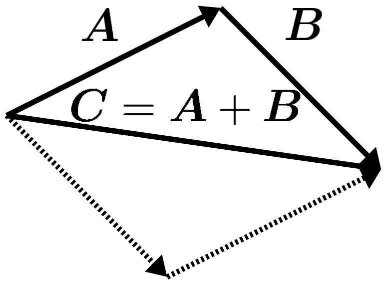


図 8.4:

する平行四辺形の対角線を与える。

4. $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の差 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ は、$\boldsymbol{A}$ と $-\boldsymbol{B}$ の和として定義される。

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$$

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ ならば、$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ はゼロベクトルと定義され、単に 0 と書く。

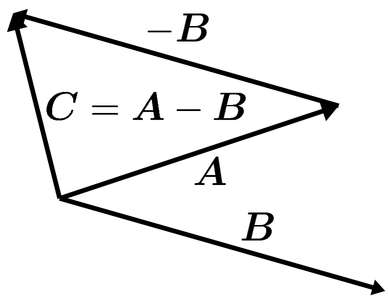


図 8.5:

ゼロベクトルは大きさが 0 で方向は定義されない。

5. ベクトル $\boldsymbol{A}$ とスカラー $a$ との積 $a\boldsymbol{A}$ は、大きさが $|a||\boldsymbol{A}|$ で、方向は $a > 0$ ならば $\boldsymbol{A}$ と同じ向き、$a < 0$ ならば $\boldsymbol{A}$ と逆向きのベクトルである。$a = 0$ の時には $a\boldsymbol{A}$ はゼロベクトルとなる。

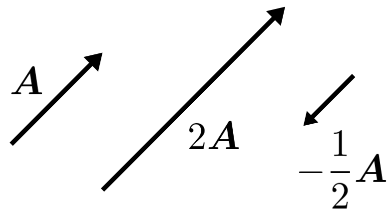

図 8.6:

以上のことから、ベクトルの演算則が得られる。以下にそれらをまとめておく。ここで、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ はベクトルであり、$a$ と $b$ はスカラーである。

1. 交換則

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \tag{8.1}$$

2. 結合則

$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} \tag{8.2}$$

$$a(b\boldsymbol{A})=ab\boldsymbol{A}=b(a\boldsymbol{A}) \tag{8.3}$$

3. 分配則

$$(a+b)\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{A} \tag{8.4}$$

$$a(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=a\boldsymbol{A}+a\boldsymbol{B} \tag{8.5}$$

## 8.2 ベクトルの成分

$(x, y, z)$ 直交座標系を導入する。この座標系は右手系（$x$ 軸が右手の親指、$y$ 軸が右手の人さし指、$z$ 軸が右手の中指に対応）[1] であるとする。$\boldsymbol{A}$ を平行移動させて、座標系の原点に $\boldsymbol{A}$ の始点を重ねる。このとき、この座標系で $\boldsymbol{A}$ の終点の座標が $(A_x, A_y, A_z)$ であるとする。この座標を用いて $\boldsymbol{A}$ を表す。

$$\boldsymbol{A}=(A_x, A_y, A_z) \tag{8.6}$$

このような表現をベクトルの代数的表現といい、$A_x$、$A_y$、$A_z$ を $\boldsymbol{A}$ の成分という。$\boldsymbol{A}$ と $x$ 軸、$y$ 軸、$z$ 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ $\alpha$、$\beta$、

[1] $x$ 軸の方向から $y$ 軸の方向へ右ネジを回したとき、そのネジが進む方向が $z$ 軸

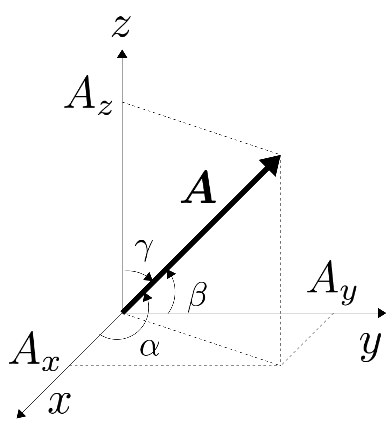


図 8.7:

$\gamma$ とすると、

$$A_x = A\cos\alpha \tag{8.7}$$

$$A_y = A\cos\beta \tag{8.8}$$

$$A_z = A\cos\gamma \tag{8.9}$$

とあらわすことができる。ただし、$A = |\boldsymbol{A}|$ である。$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ を方向余弦という。

$x$ 軸、$y$ 軸、$z$ 軸の正の向きを向いた単位ベクトル（長さが 1 のベクトル）$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ を導入する。これらのベクトルを用いると、$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$

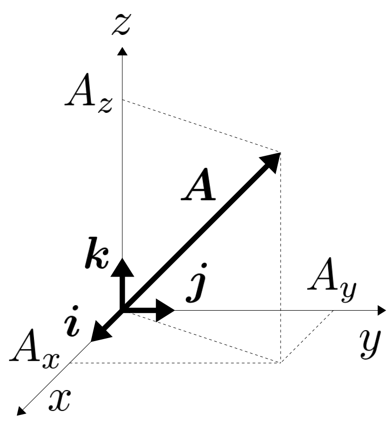


図 8.8:

は

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k} \tag{8.10}$$

と表すことができる。また、

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{8.11}$$

である。２つのベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ と $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ について

$$\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = (A_x \pm B_x, A_y \pm B_y, A_z \pm B_z) \tag{8.12}$$

$$a\boldsymbol{A} = (aA_x, aA_y, aA_z) \tag{8.13}$$

$$a\boldsymbol{A} \pm b\boldsymbol{B} = (aA_x \pm bB_x, aA_y \pm bB_y, aA_z \pm bB_z) \tag{8.14}$$

である。始点 P の座標が $(P_x, P_y, P_z)$、終点 Q の座標が $(Q_x, Q_y, Q_z)$ であるようなベクトル $\boldsymbol{V} = \vec{PQ}$ は $\boldsymbol{V} = (Q_x - P_x, Q_y - P_y, Q_z - P_z)$ で与えられる。

先に導入した単位ベクトル $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ はそれらの１次結合で任意のベクトルを表すことができる。このようなベクトルの組は完全系をなすといい、各々のベクトルは基底ベクトルと呼ばれる。ベクトル $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ はいずれも基底ベクトルである。もちろん、基底ベクトルはそれだけではない。３次元空間では、３つのベクトルを同じ始点から書いたときそれらが同一平面上にないとき（つまり１次独立な場合）、基底ベクトルとなっている。

## 8.3 スカラー積とベクトル積

### 8.3.1 スカラー積

２つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のスカラー積（内積）はそれらのベクトルの大きさ $|\boldsymbol{A}|$ と $|\boldsymbol{B}|$、およびその間のなす角 $\theta$（$0 \leq \theta \leq \pi$）を使って

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \equiv |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \cos\theta = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \tag{8.15}$$

と定義される。$\boldsymbol{A} \neq 0$ および $\boldsymbol{B} \neq 0$ の時、$\theta = \pi/2$ の場合、すなわち $\boldsymbol{A}$

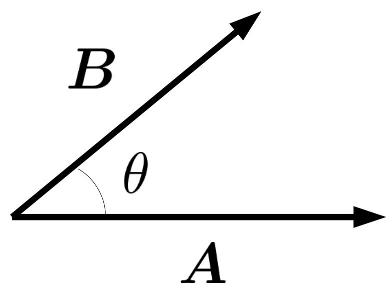


図 8.9:

と $\boldsymbol{B}$ が直交する場合には内積はゼロになる。その逆も成り立つ。ベクトルの大きさは

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}} \tag{8.16}$$

によって与えられる。$\boldsymbol{A}$ と単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ との内積をとることによって、$\boldsymbol{A}$ の $\boldsymbol{e}$ 方向の成分を取り出すことができる。

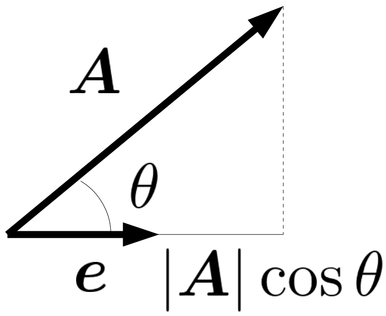


図 8.10:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e} = |\boldsymbol{A}| \cos\theta \tag{8.17}$$

したがって、単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ との内積を射影という。

スカラー積の性質は以下のとおりである。

1. 交換則

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \tag{8.18}$$

2. $a$ をスカラーとして

$$(a\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = a(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A} \cdot a\boldsymbol{B}) \tag{8.19}$$

3. 分配則

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} \tag{8.20}$$

4. $\boldsymbol{i}$ を $x$ 軸方向の単位ベクトル、$\boldsymbol{j}$ を $y$ 軸方向の単位ベクトル、$\boldsymbol{k}$ を $z$ 軸方向の単位ベクトルとすると

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1 \tag{8.21}$$

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0 \tag{8.22}$$

5. $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}$ とすると

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{8.23}$$

6. $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ を任意のベクトルとすると

$$|(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})| \leq |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \qquad \text{(シュワルツの不等式)} \tag{8.24}$$

$$|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| \leq |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| \qquad \text{(三角不等式)} \tag{8.25}$$

スカラー積の例は以下のとおり。

例 1　質点に一定の力 $\boldsymbol{F}$ を働かせ、$\boldsymbol{d}$ だけ動かしたとき、この力がする仕事。

$$W = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{d}|\cos\theta = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{d} \tag{8.26}$$

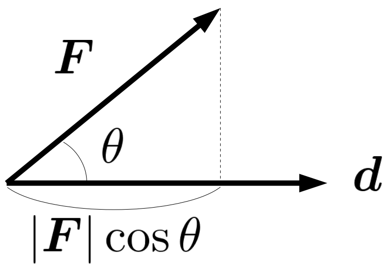


図 8.11:

例 2　$\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ をとおり、法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$ であるような平面の方程式

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0 \tag{8.27}$$

### 8.3.2　ベクトル積

2 つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のベクトル積（外積）は次のような性質をもつベクトル $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ として定義される。$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ の大きさは、$\boldsymbol{A}$ の大きさと $\boldsymbol{B}$ の大きさの積にそれら間の角の sin をかけたもの、すなわち $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ がつくる平行四辺形の面積に等しい。そして、$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ の方向は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が張る面に垂直であり、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ は右手系を作る。すなわち、$\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{B}$

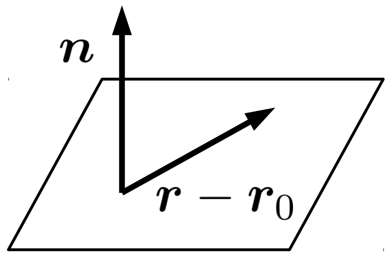


図 8.12:

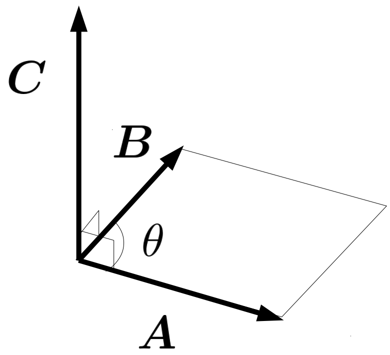


図 8.13:

へ右ネジを回したとき、ネジが進む方向が $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ の方向である。まとめると

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta\hat{\boldsymbol{C}} \tag{8.28}$$

ここで $\hat{\boldsymbol{C}}$ は $\boldsymbol{C}$ 方向の単位ベクトルである $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ がともにゼロでないとき、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が平行 $\theta=0$ または反平行 $\theta=\pi$ の場合に $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ はゼロになる。

ベクトル積の性質は以下のとおりである。

1. 交換則は成り立たない。

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} \tag{8.29}$$

2. 分配則

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} \tag{8.30}$$

3. $a$ をスカラーとして

$$(a\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=a(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\times a\boldsymbol{B}) \tag{8.31}$$

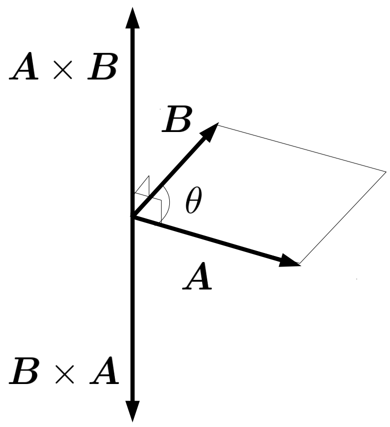


図 8.14:

4. $\boldsymbol{i}$ を $x$ 軸方向の単位ベクトル、$\boldsymbol{j}$ を $y$ 軸方向の単位ベクトル、$\boldsymbol{k}$ を $z$ 軸方向の単位ベクトルとすると

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0 \tag{8.32}$$

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} \tag{8.33}$$

$$\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} \tag{8.34}$$

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} \tag{8.35}$$

5. $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}$ とすると

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{k} \tag{8.36}$$

$$= \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}\boldsymbol{k} \tag{8.37}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{8.38}$$

ここで $|\cdots|$ は次章で解説する行列式である。

ベクトル積の例は以下のとおり。

例１　磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の中で、電荷 $q$、速度 $\boldsymbol{v}$ の荷電粒子にはたらくローレンツ力は

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{8.39}$$

で与えられる。

例 2　角運動量

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{8.40}$$

で与えられる。運動方程式 $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$ を用いると

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{L}} &= \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{p}} \\ &= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \end{aligned} \tag{8.41}$$

が得られる。ここで、$\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}} \times \dot{\boldsymbol{r}} = 0$ を用いた。この式は ”角運動量の時間変化＝力のモーメント ”を意味する。特に力が中心力 $\boldsymbol{F} \propto \boldsymbol{r}$ の場合には $\dot{\boldsymbol{L}} = 0$、すなわち角運動量は保存する。

### 8.3.3　クロネッカーのデルタとレビ・チビタのイプシロン

ここで、クロネッカーのデルタとレビ・チビタのイプシロンという記号を紹介する。クロネッカーのデルタは以下のように定義される。

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \cdots i = j \\ 0 & \cdots i \neq j \end{cases} \tag{8.42}$$

また、レビ・チビタのイプシロンは以下のように定義される。

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \cdots (i,j,k) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) \\ -1 & \cdots (i,j,k) = (1,3,2), (3,2,1), (2,1,3) \\ 0 & \cdots \text{それ以外} \end{cases} \tag{8.43}$$

この記号は以下のような性質をもつ。

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} \tag{8.44}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{8.45}$$

今、$\boldsymbol{i} \to \boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{j} \to \boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{e}_3$ および $A_x \to A_1$、$A_y \to A_2$、$A_z \to A_3$ とする。このとき、

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{8.46}$$

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{8.47}$$

が成り立つ。任意のベクトルは $\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i\boldsymbol{e}_i$ とかけるので

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} A_iB_j(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} A_iB_j\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} A_iB_i \tag{8.48}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} A_iB_j(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}A_iB_j\boldsymbol{e}_k \tag{8.49}$$

$$\Leftrightarrow (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_i = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}A_jB_k \tag{8.50}$$

しばしばいろんな教科書では、アインシュタインの縮約規則が用いられている。これは、”1つの項で添字が重なると、その添字について和をとる ” という規則である。これを用いると、2つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積および外積は以下のように表される。

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_iB_i$$
$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_i = \epsilon_{ijk}A_jB_k$$

この規則は大変有用なものであるが、本ノートでは用いない。

### 8.3.4 3重積

3つのベクトル $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ のスカラー3重積は以下のように定義される。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \sum_{i=1}^{3} C_i(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_i \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}C_iA_jB_k \qquad (8.51)\\ &= \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) \qquad (8.52)\end{aligned}$$

$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ が右手系をなすならば、スカラー3重積は $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ を辺とする平行六面体の体積に等しい。

また、3つのベクトル $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ のベクトル3重積は

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \tag{8.53}$$

によって定義される。その成分は

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})]_i &= \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} A_j (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})_k \\
&= \sum_{j,k,l,m=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} A_j B_l C_m \\
&= \sum_{j,l,m=1}^{3} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) A_j B_l C_m \\
&= (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) B_i - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) C_i \qquad (8.54)
\end{aligned}
$$

と計算される。したがって

$$
\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) \boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \boldsymbol{C} \qquad (8.55)
$$

# 第9章　行列と行列式

## 9.1　行列の定義と演算

以下のように、$m$ 個の行と $n$ 個の列に数を並べたものを $m$ 行 $n$ 列の（または $m \times n$）行列という。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{9.1}$$

各々の $a_{ij}$ は、行列 $A$ の $(i,j)$ 要素または $(i,j)$ 成分と呼ばれ、$A_{ij}$ または $(A)_{ij}$ と書かれることも多い。また、行列を $A=(a_{ij})$ と記すこともある。

行列の要素（成分）は実数であっても、複素数であってもよい。全ての要素が実数のとき、その行列を実行列という。また、１行しかない行列は行ベクトル、１列しかない行列を列ベクトルという。特に行の数と列の数が等しく $n$ となっている場合、その行列を $n \times n$ 行列、または $n$ 次の正方行列という。

行列の演算は以下のとおり定義される。

1. 行列の加減
   行列の足し算と引き算は要素どおしの足し算と引き算で定義される。すなわち、$m$ 行 $n$ 列の行列を $A=(a_{ij})$、$B=(b_{ij})$、$C=(c_{ij})$ とすると

   $$C = A \pm B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \tag{9.2}$$

   である。

2. 数と行列との積
   数と行列の積は各要素に数をかけることにより定義される。すなわち、$m$ 行 $n$ 列の行列を $A=(a_{ij})$、$B=(b_{ij})$、$s$ をある数とすると

   $$B = sA \Leftrightarrow b_{ij} = sa_{ij} \tag{9.3}$$

   である。

3. 行列どおしの積
   $A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 行列、$B = (b_{ij})$ を $n \times p$ 行列とすると、その積 $C = AB = (c_{ij})$ は、その要素が

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \tag{9.4}$$

   で与えられる $m \times p$ 行列である。行列の積 $AB$ が定義されるのは $A$ の列の数と $B$ の行の数が等しい場合である。したがって、積 $AB$ と $BA$ がともに存在するには、$A$ が $m \times n$ 行列ならば $B$ は $n \times m$ 行列でなければならない。このとき、$AB$ は $m \times m$ 行列、$BA$ は $n \times n$ 行列となる。一般に、$A$ と $B$ がともに正方行列であっても、

$$AB \neq BA \tag{9.5}$$

   であり、$A$ と $B$ は交換しない。
   行列の積の規則は以下のとおりである。

   (a) $k$ をある数として

$$(kA)B = k(AB) = A(kB) \tag{9.6}$$

   (b) 結合則

$$A(BC) = (AB)C \tag{9.7}$$

   (c) 分配則

$$(A+B)C = AC + BC \tag{9.8}$$

$$C(A+B) = CA + CB \tag{9.9}$$

特別な行列を紹介する。ただし、これから紹介する特別な行列はむしろ物理には頻繁に現れるものである。

まず、転置行列について述べる。$A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 行列とするとき、転置行列 $A^T$ は

$$(A^T)_{ij} = a_{ji} \tag{9.10}$$

で定義される。すなわち、行と列を入れ替えることによって定義される。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \dots & a_{m2} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{9.11}$$

実正方行列 $A$ は $A^T = A$ すなわち $a_{ij} = a_{ji}$ の時対称行列という。また、$A^T = -A$ すなわち $a_{ij} = -a_{ji}$ の時交代行列（反対称行列）という。交代行列では $a_{ii} = -a_{ii}$ となるので、対角要素は $a_{ii} = 0$ となる。

次にエルミート共役行列について述べる。$A = (a_{ij})$ を複素数を成分に持つ $m \times n$ 行列とする。エルミート共役行列 $A^\dagger$（$\dagger$ は「ダガー」と発音する）は

$$(A^\dagger)_{ij} = a_{ji}^* \tag{9.12}$$

で定義される。すなわち、行と列を入れ替えてさらに複素共役をとることによって定義される。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^\dagger = \begin{pmatrix} a_{11}^* & \dots & a_{m1}^* \\ a_{12}^* & \dots & a_{m2}^* \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n}^* & \dots & a_{mn}^* \end{pmatrix} \tag{9.13}$$

複素正方行列 $A$ は $A^\dagger = A$ すなわち $a_{ij} = a_{ji}^*$ の時エルミート行列という。また、$A^\dagger = -A$ すなわち $a_{ij} = -a_{ji}^*$ の時反エルミート行列（歪エルミート行列）という。実行列の場合の対称行列を要素が複素数の場合に拡張したのがエルミート行列であり、反対称行列を要素が複素数の場合に拡張したのが反エルミート行列である。エルミート行列では $a_{ii} = a_{ii}^*$ となるので対角要素は実数となり、反エルミート行列では $a_{ii} = -a_{ii}^*$ となるので対角要素は純虚数となる。$C$ を複素正方行列とする。このとき $C + C^\dagger$ はエルミート行列、$C - C\dagger$ は反エルミート行列となる。したがって、任意の複素正方行列はエルミート行列と反エルミート行列の和で表すことができる。

$$A = \frac{1}{2}(C + C^\dagger) = A^\dagger,\ B = \frac{1}{2}(C - C^\dagger) = -B^\dagger \tag{9.14}$$

$$\Rightarrow C = A + B,\ C^\dagger = A - B \tag{9.15}$$

実正方行列が対称行列と反対称行列の和で表されることはいうまでもない。

正方行列で、すべての非対角要素が $0$ のものを対角行列という。

$$\begin{pmatrix} c_1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & c_n \end{pmatrix} = c_i \delta_{ij} \tag{9.16}$$

$$= \mathrm{diag}(c_1, \cdots, c_n) \tag{9.17}$$

対角行列の中で $a_{ii} = 1$ となるものを単位行列といい、$I$ または $E$ であらわす。例えば、$3 \times 3$ 行列の単位行列は

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.18}$$

である。単位行列は以下のような性質をもつ。

$$AI = IA = A \tag{9.19}$$

$$I^n = I \cdot I \cdots I = I \tag{9.20}$$

ただし、A は任意の正方行列である。また、逆行列 $A^{-1}$ は以下のような性質をもつ行列である。

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \tag{9.21}$$

行列 A は逆行列を持つとき、正則であるといわれる。

行列の積の逆行列、転置行列およびエルミート共役行列について以下の関係式が成り立つ。

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \tag{9.22}$$

$$(AB)^T = B^T A^T \tag{9.23}$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \tag{9.24}$$

式（9.22）は明らかであろう。式（9.23）と（9.24）の証明は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \left[(AB)^T\right]_{ij} &= (AB)_{ji} \\ &= \sum_k A_{jk} B_k i \\ &= \sum_k (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} \\ &= (B^T A^T)_{ij} \end{aligned} \tag{9.25}$$

$$\begin{aligned} \left[(AB)^\dagger\right]_{ij} &= (AB)^*_{ji} \\ &= \sum_k A^*_{jk} B^*_{ki} \\ &= \sum_k (B^\dagger)_{ik} (A^\dagger)_{kj} \\ &= (B^\dagger A^\dagger)_{ij} \end{aligned} \tag{9.26}$$

## 9.2　行列式

### 9.2.1　置換

行列式を定義するために置換について説明する。置換とはものを置き換える操作のことであるが、ここでは 1 から $n$ までの正の整数の並べかえる置換を考える。置換 $\sigma$ によって $(1, 2, \cdots, n)$ がそれぞれ $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ に写されるとき、以下のいずれかのように書く。

$$\sigma(k) = i_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{9.27}$$

$$\sigma : k \to i_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{9.28}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \tag{9.29}$$

$n$ 文字の置換の数は $n!$ である。なお、式 (9.29) の表現では $1 \to i_1$、$2 \to i_2$、$\cdots$、$n \to i_n$ という対応を表せばよいから、

$$\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ i_{k_1} & i_{k_2} & \cdots & i_{k_n} \end{pmatrix} \tag{9.30}$$

と書くこともできる。

例１　1 文字の置換

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

例２　2 文字の置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2)$$

例３　3 文字の置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2),$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2, 3), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3)$$

なお、例１〜３の右辺の意味は後で紹介する。

また、次の記号は全て同じ置換を表している。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

二つの置換 $\sigma$ と $\tau$ に対して、それらを合成して得られる操作も置換である。これを $\sigma$ と $\tau$ の積といい次のように定義する。

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}, \ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \tag{9.31}$$

とするとき、

$$\begin{aligned} \sigma\tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9.32}$$

このように定義された置換の積について以下のような結合則が成り立つ。

$$(\sigma\tau)\rho = \sigma(\tau\rho) \tag{9.33}$$

しかしながら、交換則は成立しない。実際、

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.34}$$

に対して

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.35}$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{9.36}$$

となる。

すべての文字を動かさない置換を恒等置換といい、1 で表す。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = 1 \tag{9.37}$$

任意の置換 $\sigma$ に対して、恒等置換は以下の性質を満たす。

$$\sigma 1 = 1\sigma = \sigma \tag{9.38}$$

また、任意の置換 $\sigma$ に対して、その逆の操作 $\sigma^{-1}$ も一つの置換となっている。これを $\sigma$ の逆置換という。すなわち、

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots n \\ i_1 & i_2 & \cdots i_n \end{pmatrix} \text{に対し、}$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots i_n \\ 1 & 2 & \cdots n \end{pmatrix} \tag{9.39}$$

明らかに、

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = 1 \tag{9.40}$$

が成り立つ。同様に

$$(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma \tag{9.41}$$

$$(\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1} \tag{9.42}$$

が成立する。

置換によって変換されない文字があるとき、それを省略することもある。すなわち

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{9.43}$$

である。このような書き方をしたとき、$k_1, k_2, \cdots k_r$ を $r$ 個の文字とすると

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{r-1} & k_r \\ k_2 & k_3 & \cdots & k_r & k_1 \end{pmatrix} \equiv (k_1, k_2, \cdots, k_r) \tag{9.44}$$

を巡回置換という。例２、例３の右辺は恒等置換の記号および巡回置換の表記である。任意の置換は巡回置換の積で表すことができる。実際

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1,4,3)(2,5) \tag{9.45}$$

特に、２つの文字の置換

$$\begin{pmatrix} j & k \\ k & j \end{pmatrix} = (k, j) \tag{9.46}$$

を互換という。任意の置換は互換の積で表すことができる。また、一つの置換を互換の積で表す場合その表し方は１通りではない。しかしながら、その際、その互換の積が偶数であるか奇数であるかは表現の仕方に関係な

く定まる。偶数個の互換の積で表される置換を偶置換、奇数個の互換の積で表される置換を奇置換という。置換 $\sigma$ の符号 $\epsilon(\sigma)$ は以下のように定義される。

$$\epsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma\text{ が偶置換の場合} \\ -1 & \sigma\text{ が奇置換の場合} \end{cases} \tag{9.47}$$

これに関して、以下のような性質が成り立つ。

$$\epsilon(\sigma\tau) = \epsilon(\sigma)\epsilon(\tau) \tag{9.48}$$

$$\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma) \tag{9.49}$$

### 9.2.2 行列式の定義と基本的な性質

$n \times n$ 正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、行列式 $|A|$ は以下のように定義される。

$$|A| = \sum_{\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots n \\ i_1 & i_2 & \cdots i_n \end{pmatrix}} \epsilon(\sigma) a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{n,i_n} \tag{9.50}$$

$A$ の行列式は、$\det A$、$\det(a_{ij})$ や

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{9.51}$$

と書かれる。

例１ $2 \times 2$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdots \text{偶置換} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdots \text{奇置換}$$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{9.52}$$

例2　$3\times 3$ 行列

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\cdots\text{偶置換}\quad \sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\cdots\text{奇置換}$$

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\cdots\text{偶置換}\quad \sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\cdots\text{奇置換}$$

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdots\text{偶置換}\quad \sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdots\text{奇置換}$$

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ &\quad - a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned} \tag{9.53}$$

なお、$3\times 3$ 行列の行列式はレヴィチビタの記号 $\epsilon_{ijk}$ を用いて

$$\det A=\sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k} \tag{9.54}$$

と書ける。したがって $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{z}$、$\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{z}$、$\boldsymbol{C}=C_x\boldsymbol{i}+C_y\boldsymbol{j}+C_z\boldsymbol{z}$ に対して

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{9.55}$$

$$\dot{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{9.56}$$

となる。

例　次の行列式を求めよ

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \tag{9.57}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} \tag{9.58}$$

行列式の性質をまとめる。

1. 転置行列の行列式は元の行列の行列式に等しい。

$$|A^T| = |A| \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{9.59}$$

証明は以下のとおり。

$$\begin{aligned} \because \quad \det A &= \sum_\sigma \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_\sigma \epsilon(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} \\ &= \sum_\sigma \epsilon(\sigma^{-1}) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_\sigma \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \end{aligned} \tag{9.60}$$

ここで、$\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma^{-1})$ を用いた。

2. $A = (a_{ij})$ の第 $j$ 列が $a_{ij} = a_{ij'} + a_{ij''}$ $(1 \leq i \leq n)$ の時、$|A|$ は第 $j$ 列だけをそれぞれ $a_{ij'}$、$a_{ij''}$ $(1 \leq i \leq n)$ で置き換えて得られる 2 つの行列式の和に等しい。

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j'} + a_{1j''} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j'} + a_{2j''} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj'} + a_{nj''} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j'} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j'} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj'} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j''} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j''} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj''} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{9.61}$$

3. $A = (a_{ij})$ の第 $j$ 列の各要素を $c$ 倍して得られる行列の行列式は $c|A|$ となる。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ca_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ca_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ca_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{9.62}$$

4. 上記の 2 と 3 を合わせると

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & \sum_\nu c_\nu a_{1j}^{(\nu)} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & \sum_\nu c_\nu a_{2j}^{(\nu)} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & \sum_\nu c_\nu a_{nj}^{(\nu)} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= \sum_\nu c_\nu
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j}^{(\nu)} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2j}^{(\nu)} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nj}^{(\nu)} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\tag{9.63}
$$

5. ある列が全て 0 である行列の行列式はゼロである。

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= 0
\tag{9.64}
$$

6. 行列 $A = (a_{ij})$ の列に置換

$$
\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}
$$

を作用させて得られる行列 $a_{i\tau(j)}$ の行列式は $\epsilon(\tau)|A|$ となる。

$$
\begin{vmatrix}
a_{1k_1} & \cdots & a_{1k_n} \\
a_{2k_1} & \cdots & a_{2k_n} \\
\vdots & \cdots & \vdots \\
a_{nk_1} & \cdots & a_{nk_n}
\end{vmatrix}
= \epsilon(\tau)
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\tag{9.65}
$$

7. 6 の特別な場合として、行列の 2 つの列を入れ替えれば行列式の符号が変わる。

$$
\begin{array}{c}
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \\
\begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{\cdots} & \check{j} & \phantom{\cdots} & \check{k} & \phantom{\cdots} & \phantom{a_{nn}} \end{array}
\end{array}
= -
\begin{array}{c}
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \\
\begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{\cdots} & \check{j} & \phantom{\cdots} & \check{k} & \phantom{\cdots} & \phantom{a_{nn}} \end{array}
\end{array}
\tag{9.66}
$$

8. 7 を用いると、行列式の 2 つの列が一致すれば 0 になる。

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_1 & \cdots & a_1 & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_n & \cdots & a_n & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= 0
\tag{9.67}
$$

9. 任意の列の全ての要素に同じ数をかけてこれを他の行の対応する要素に加えても行列式は変わらない。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j}+ca_{1k} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj}+ca_{nk} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{9.68}$$

10. $A$ と $B$ が正方行列であるならば

$$|AB| = |A||B| \tag{9.69}$$

なお、上記の 2〜9 は列の代わりに行としても成立する。さらに、

11.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{9.70}$$

証明は以下のとおり

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \sum_{\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}} \epsilon(\sigma) a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \\ &= \sum_{\sigma'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}} \epsilon(\sigma') a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \\ &= \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{9.71}$$

12. 11 および 3 の結果を用いると以下の等式が成り立つ。

$$
\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{9.72}
$$

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{\huge 0} & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \text{\huge 0} \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{9.73}
$$

例

$$
\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = 0 \tag{9.74}
$$

### 9.2.3 行列式の展開

まず、ある列ベクトルは以下のように展開できる。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} &= a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{n1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{k1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (k
\end{aligned} \tag{9.75}
$$

この結果を用いると、

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= \sum_{k=1}^{n} a_{k1}
\begin{vmatrix}
0 & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & a_{k2} & \cdots & \vdots & a_{kn} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
(k \tag{9.76}
$$

となる。同様の手順を繰り返すと、

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix}
0 & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & a_{k2} & \cdots & \vdots & a_{kn} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
&=
\begin{vmatrix}
0 & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & 0 & \vdots & \vdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
(k \\
&= (-1)^{k-1}
\begin{vmatrix}
a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
< k
\end{aligned}
\tag{9.77}
$$

ここで $<k$ は $k$ 行がないことを意味している。この結果を使うと、

$$
|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{k1} \Delta_{k1} \tag{9.78}
$$

となる。ここで、$\Delta_{ij}$ は行列 $A$ の余因子と呼ばれ

$$
\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}
\underset{\hat{j}}{
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\
a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
}
< i \tag{9.79}
$$

で定義される。$\hat{j}$ は $j$ 列がないことを意味する。同様にして、

$$
|A| = \sum_{l=1}^{n} a_{1l} \Delta_{1l} \tag{9.80}
$$

と書ける。さらに一般的には

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} \tag{9.81}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} \tag{9.82}$$

これらを余因子展開という。これを $3 \times 3$ 行列で確かめてみる。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{9.83}$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \tag{9.84}$$

$$\Delta_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} \tag{9.85}$$

$$\Delta_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \tag{9.86}$$

$$\sum_{k=1}^{3} a_{1k}\Delta_{1k} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} = |A| \tag{9.87}$$

例

$$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} = 2(a+b)(b+c)(c+a) \tag{9.88}$$

### 9.2.4 連立１次方程式の解

連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{9.89}$$

$$\Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{9.90}$$

の解を求める。上式より、

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \tag{9.91}$$

と書けるので、

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \tag{9.92}$$

となる。したがって、$A$ の $i$ 列を $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$ で置き換えた行列の行列式 $\Delta_i$ は以下のように与えられる。

$$\Delta_i = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ \breve{i} \end{array} = x_i|A| \tag{9.93}$$

すなわち、連立一次方程式の解は

$$x_i = \frac{\Delta_i}{|A|} \tag{9.94}$$

で与えられる。これをクラメールの公式という。

例 クラメールの公式を用いて、以下の連立１次方程式を解け。

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{9.95}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9.96}$$

### 9.2.5 逆行列

式（9.90）より

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} \tag{9.97}$$

$$\Leftrightarrow x_i = \sum_{j=1}^{n} (A^{-1})_{ij} b_j \tag{9.98}$$

と書ける。一方、クラメールの公式の中の $\Delta_i$ は

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{9.99}$$
$$\hphantom{\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} &} \check{i}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_j \Delta_{ji} \tag{9.100}$$

と余因子を使って展開できるので、逆行列 $A^{-1}$ の要素は以下のように与えられる。

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{\Delta_{ji}}{|A|} \tag{9.101}$$

逆行列が存在する行列を正則行列という。$A$ が正則行列であるための条件は、$|A| \neq 0$ である。

### 9.2.6 直交行列とユニタリー行列

$A$ が実正方行列であるとき、

$$A^{-1} = A^T \leftrightarrow (A^{-1})_{ij} = A_{ji} \tag{9.102}$$

をみたす行列を直交行列という。また、$A$ が複素正方行列であるとき、

$$A^{-1} = A^\dagger \leftrightarrow (A^{-1})_{ij} = A^*_{ji} \tag{9.103}$$

をみたす行列をユニタリー行列という。

## 9.3 行列の固有値と行列の対角化

### 9.3.1 行列の固有値と固有ベクトル

$A = (a_{ij})$ を $n \times n$ 行列、$\boldsymbol{X}$ を $n$ 個の要素をもつ列ベクトル $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ として、

$$A\boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{X} \tag{9.104}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{9.105}$$

を考える。ここで、$\lambda$ は数である。この式を満たすゼロでない $\boldsymbol{X}$ と $\lambda$ をそれぞれ行列 $A$ の固有ベクトルと固有値という。式（9.104）は

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{X} = 0 \tag{9.106}$$

と表されるが、$A - \lambda E$ が逆行列をもつ場合には、$\boldsymbol{X} = 0$ となるので矛盾する。したがって、固有値 $\lambda$ を定める式は

$$|A - \lambda E| = 0 \tag{9.107}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{9.108}$$

で与えられる。この式は $\lambda$ についての $n$ 次方程式であるから、固有値は複素数まで許せば $n$ 個存在する。それらを $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とすると、各固有値 $\lambda_k (k = 1, 2, \dots, n)$ に対して、固有値方程式

$$A\boldsymbol{X}_k = \lambda_k \boldsymbol{X}_k \tag{9.109}$$

はゼロでない解 $\boldsymbol{X}_k$ をもつ。つまり、各々の固有値に対応する固有ベクトルが存在する。

### 9.3.2 行列の対角化

次に、先に述べた行列の固有値と固有ベクトルの結果を用いて、行列の対角化を考察する。$A = (a_{ij})$ を $n \times n$ の対称行列、すなわち $A^T = A$（$a_{ij} = a_{ji}$）とし、固有値方程式

$$A\boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{X} \tag{9.110}$$

を考える。この固有値方程式の固有値を $\lambda_k$、対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_k$ とする。

$$A\boldsymbol{v}_k = \lambda_k \boldsymbol{v}_k \tag{9.111}$$

ただし、固有値は全て異なるものとする。ここで、固有ベクトル $\boldsymbol{v}_k$ を

$$\boldsymbol{v}_k = \begin{pmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \\ \vdots \\ v_{nk} \end{pmatrix} \tag{9.112}$$

と書くと、式 (9.111) は

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_{jk} = \lambda_k v_{ik} \tag{9.113}$$

と書くことができる。また、以下のような固有ベクトルから作られる行列 $V$ と固有値から作られる対角行列 $\Lambda$

$$\begin{aligned} V &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \dots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9.114}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{\huge0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge0} & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{9.115}$$

を定義すると、式（9.113）は次のように行列の積の形で書かれる。

$$AV = V\Lambda \tag{9.116}$$

両辺の転置をとり、右から $V$ をかけると、

$$V^T A = \Lambda V^T \tag{9.117}$$

$$V^T AV = \Lambda V^T V \tag{9.118}$$

$$V^T V\Lambda = \Lambda V^T V \Leftrightarrow (\lambda_i - \lambda_j)(V^T V)_{ij} = 0 \tag{9.119}$$

が得られる。全ての固有値が異なる場合を考えているので、$i \neq j$ の時、$(V^T V)_{ij} = 0$ となる。一方、$(V^T V)_{ii} = 1$ ととることにすると、

$$(V^T V)_{ij} = \delta_{ij} \Leftrightarrow V^T V = VV^T = E \tag{9.120}$$

となり、$V$ は直交行列である。この条件は

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (V^T)_{ik} V_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} V_{ki} V_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} v_{ki} v_{kj} \\ &= \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_j \end{aligned} \tag{9.121}$$

と書かれ、異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する。この時、

$$V^TAV = \Lambda V^TV = \Lambda \tag{9.122}$$

なので、対称行列 $A$ は規格化された（$|\boldsymbol{v}_i| = 1$）固有ベクトルからつくられる直交行列 $V$ を用いてその要素が固有値であるような対角行列に変換される。これを行列の対角化という。ここでは、固有値がすべて異なることを仮定したが、同じ値の固有値が存在する場合であってもその固有ベクトルが直交するように選ぶことはいつでも可能である。それを用いて対角化できる。

なお、$A$ がエルミート行列の場合には、その固有ベクトルからつくられるユニタリー行列によって対角化される。

### 9.3.3 2次形式の標準形

以下のような $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の $n$ 個の変数から作られる表式を2次形式という。

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \tag{9.123}$$

$$\begin{aligned} = a_{11}x_1^2 \quad &+(a_{12}+a_{21})x_1x_2 \quad +\cdots \quad +(a_{n1}+a_{1n})x_1x_n \\ &a_{22}x_2^2 \qquad\qquad +\cdots \quad +(a_{n2}+a_{2n})x_2x_n \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\cdots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +a_{nn}x_n^2 \end{aligned} \tag{9.124}$$

係数の $a_{ij}$ は対称（$a_{ij} = a_{ji}$）と考えてよい。なぜならば、たとえ対称でなくても $(a_{ij}+a_{ji})/2$ を改めて $a_{ij} = a_{ji}$ とすればよいからである。この２次形式は以下のように表すことができる。

$$Q = \boldsymbol{X}^TA\boldsymbol{X} \tag{9.125}$$

ただし、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{9.126}$$

$A$ の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_k$ $(n = 1, \cdots, n)$ から作られる直交行列 $V = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ を使うと

$$
\begin{aligned}
Q &= \boldsymbol{X}^T V V^T A V V^T \boldsymbol{X} \\
&= (V^T \boldsymbol{X})^T (V^T A V)(V^T \boldsymbol{X}) \\
&= \boldsymbol{Y}^T \Lambda \boldsymbol{Y} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2
\end{aligned} \tag{9.127}
$$

のように、$y_1 y_2$ や $y_2 y_3$ などの項を含まない 2 次形式に変換される。このような表式を標準形という。ここで、$\Lambda_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ は $A$ の固有値を要素にもつ対角行列であり、

$$
\boldsymbol{X} = V\boldsymbol{Y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{9.128}
$$

このように、2 次形式は係数から作られる対称行列の固有ベクトルからなる直交行列を用いて標準形に変換される。

例 1　以下の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。

$$
A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.129}
$$

例 2　以下の行列を対角化せよ。

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{9.130}
$$

例 3　以下の 2 次形式を標準形に直せ。

$$
Q = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 x_2 \tag{9.131}
$$

　行列の対角化が物理に現れる簡単な例として、図 9.1 のようなバネ定数 $k$ と $k'$ のバネによってつながれた質量 $m$ の質点の運動（連成振動）を考察する。2 つの質点の平衡の位置からの変位を $x_1$、$x_2$ とすると、ニュートンの運動方程式は

$$
m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k'(x_1 - x_2) \tag{9.132}
$$

$$
m\ddot{x}_2 = -kx_2 + k'(x_1 - x_2) \tag{9.133}
$$

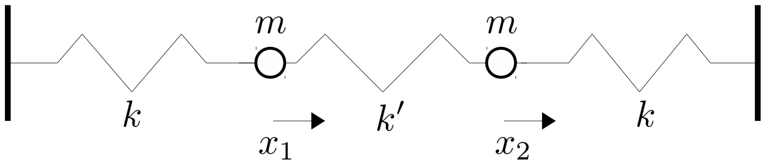


図 9.1: 連成振動

で与えられる。ここで、$k/m = \omega^2$、$k'/m = \omega'^2 = \epsilon\omega^2$ と置くと上記の運動方程式は

$$\ddot{x}_1 = -(\omega^2 + \omega'^2)x_1 + \omega'^2 x_2 \tag{9.134}$$

$$\ddot{x}_2 = -(\omega^2 + \omega'^2)x_2 + \omega'^2 x_1 \tag{9.135}$$

となる。解を得るために

$$x_1 = A_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda t + \delta)} \tag{9.136}$$

$$x_2 = A_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda t + \delta)} \tag{9.137}$$

を代入すると

$$\begin{pmatrix} \omega^2 + \omega'^2 & -\omega'^2 \\ -\omega'^2 & \omega^2 + \omega'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \tag{9.138}$$

となる。すなわち $\lambda^2$ は上式左辺の行列を固有値である。固有値を求めると

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - (\omega^2 + \omega'^2) & \omega'^2 \\ \omega'^2 & \lambda^2 - (\omega^2 + \omega'^2) \end{vmatrix} = 0 \tag{9.139}$$

$$\to \lambda^2 = \omega^2 + 2\omega'^2 = (1 + 2\epsilon)\omega^2 \tag{9.140}$$

$$\lambda^2 = \omega^2 \tag{9.141}$$

となる。この値を特に固有振動数という。また、各々の固有振動数に対応する固有ベクトルは

$\lambda = \sqrt{1 + 2\epsilon}\omega$ の場合

$$A_2 = -A_1 \leftrightarrow \boldsymbol{v}^T = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) \equiv \boldsymbol{v}_1^T \tag{9.142}$$

$\lambda = \omega$ の場合

$$A_2 = A_1 \leftrightarrow \boldsymbol{v}^T = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \equiv \boldsymbol{v}_2^T \tag{9.143}$$

で与えられる。これらの運動の状態は各々の固有振動数に対して、下図のように与えられる。これらを固有振動という。一般解は固有振動の重ね合


図 9.2: 固有振動数に対応する運動状態。(a)$\lambda = \sqrt{1+2\epsilon}\omega$、(b) $\lambda = \omega$

わせによって与えられる。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_1 \boldsymbol{v}_1 \cos(\sqrt{1+2\epsilon}\omega t + \delta_1) + a_2 \boldsymbol{v}_2 \cos(\omega t + \delta_2) \tag{9.144}$$

$a_1$、$a_2$、$\delta_1$、$\delta_2$ は定数であり、初期条件によって決定される。

## 9.4 行列のトレース

$n \times n$ 正方行列 $A = (a_{ij})$ のトレース（跡）は、対角要素の和として定義される。

$$\mathrm{Tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \tag{9.145}$$

$A = (a_{ij})$ を $n \times m$ 行列、$B = (b_{ij})$ を $m \times n$ 行列とすると $AB$ は $n \times n$ 正方行列、$BA$ は $m \times m$ 正方行列となる。この時

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}AB &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{m} (BA)_{jj} \\ &= \mathrm{Tr}BA \end{aligned} \tag{9.146}$$

が成立する。すなわち、トレースは交換する。この結果を用いると、

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A_1 A_2 \cdots A_{l-1} A_l) &= \mathrm{Tr}(A_2 A_3 \cdots A_{l-1} A_l A_1) \\ &= \mathrm{Tr}(A_3 \cdots A_{l-1} A_l A_1 A_2) \\ &= \mathrm{Tr}(A_l A_1 A_2 \cdots A_{l-1}) \end{aligned} \tag{9.147}$$

となる。

## 9.5　座標変換とベクトル

本節と次節では、座標 $(x, y, z)$ を $(x_1, x_2, x_3)$ と表し、ベクトルの成分 $(V_x, V_y, V_z)$ を $(V_1, V_2, V_3)$ と表すことにする。

### 9.5.1　座標軸の平行移動

図 9.3 のように直交座標系 $\mathrm{O} - xyz$ の各座標軸を平行移動して、新しい直交座標系 $\mathrm{O}' - x'y'z'$ を作る。この時、空間の中の任意の点 P の O に関

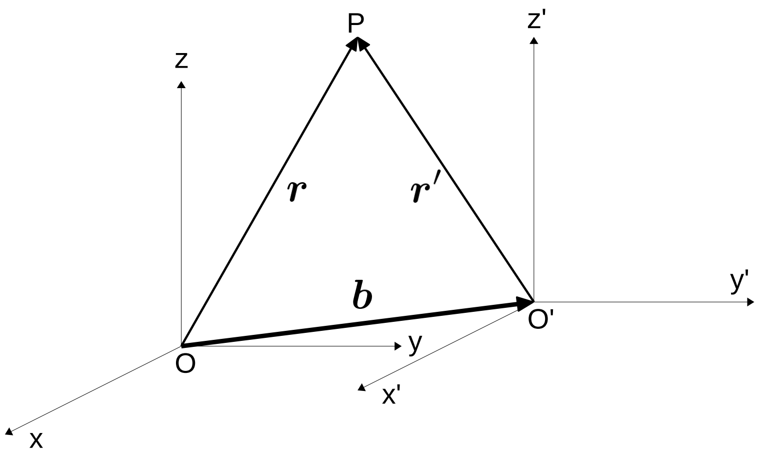


図 9.3: 座標軸の平行移動

する位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = \vec{\mathrm{OP}}$、O' に関する位置ベクトルを $\boldsymbol{r}' = \vec{\mathrm{O'P}}$、そして $\boldsymbol{b} = \vec{\mathrm{OO'}}$ とする。図 9.3 より、

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{b} \tag{9.148}$$

$$x_1' = x_1 - b_1 \tag{9.149}$$

$$x_2' = x_2 - b_2 \tag{9.150}$$

$$x_3' = x_3 - b_3 \tag{9.151}$$

が成り立つ。ここで、$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$、$\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$、$\boldsymbol{r}' = (x_1', x_2', x_3')$ である。これが、座標軸の平行移動を表す座標変換の式である。

あるベクトル $\boldsymbol{V}$ の成分 $(V_x, V_y, V_z)$ が座標軸の平行移動でどのように変わるかを考える。ベクトル $\boldsymbol{V}$ の始点と終点をそれぞれ P、Q とし、その $\mathrm{O} - xyz$ 系での位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_P$、$\boldsymbol{r}_Q$、$\mathrm{O}' - x'y'z'$ 系での位置ベクトル

を $\boldsymbol{r}'_P$、$\boldsymbol{r}'_Q$ とする。すると

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{r}_Q - \boldsymbol{r}_P \tag{9.152}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \\ V'_3 \end{pmatrix} &= \boldsymbol{r}'_Q - \boldsymbol{r}'_P = \boldsymbol{r}_Q - \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{r}_Q - \boldsymbol{r}_P \\ &= \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9.153}$$

このように、座標軸の平行移動によってベクトルの成分は変わらない。

### 9.5.2 座標軸の回転

図 9.4 のように直交座標系 $\mathrm{O} - xyz$ を原点 O のまわりに回転させて、新しい直交座標系 $\mathrm{O} - x'y'z'$ を作る。これらの座標系での直交単位ベクトル

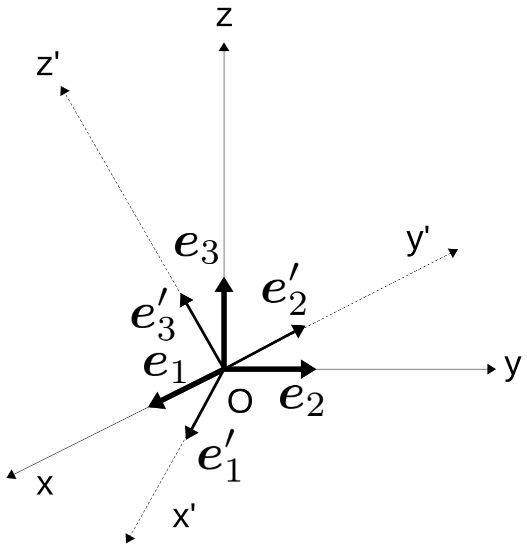


図 9.4: 座標軸の回転

を $\boldsymbol{e}_i$ および $\boldsymbol{e}'_i (i = 1, 2, 3)$ とする。ベクトルの組 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ は基底ベク

トルをなすので、$\boldsymbol{e}'_i$ はそれらの線形結合で表すことができる。

$$\boldsymbol{e}'_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{12}\boldsymbol{e}_2 + a_{13}\boldsymbol{e}_3 = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}\boldsymbol{e}_j \tag{9.154}$$

$$\boldsymbol{e}'_2 = a_{21}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + a_{23}\boldsymbol{e}_3 = \sum_{j=1}^{3} a_{2j}\boldsymbol{e}_j \tag{9.155}$$

$$\boldsymbol{e}'_3 = a_{31}\boldsymbol{e}_1 + a_{32}\boldsymbol{e}_2 + a_{33}\boldsymbol{e}_3 = \sum_{j=1}^{3} a_{3j}\boldsymbol{e}_j \tag{9.156}$$

まとめて、

$$\boldsymbol{e}'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\boldsymbol{e}_j \tag{9.157}$$

と書かれる。9 つの係数 $a_{ij}$ は全てが独立であるわけではない。$\boldsymbol{e}'_i$ の規格直交性の条件から

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_j &= \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} a_{ik}a_{jl}(\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_l) \\
&= \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} a_{ik}a_{jl}\delta_{kl} \\
&= \sum_{k=1}^{3} a_{ik}a_{jk} \qquad (9.158) \\
&= \sum_{k=1}^{3} (A)_{ik}(A^T)_{kj} \qquad (9.159)
\end{aligned}$$

という 6 つの条件が課せられる。ここで $A$ は $(A)_{ij} = a_{ij}$ をみたす行列である。上の条件は

$$I = AA^T = A^T A \tag{9.160}$$

と表されるので、$A$ は直交行列である。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_1 \\ \boldsymbol{e}'_2 \\ \boldsymbol{e}'_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_1 \\ \boldsymbol{e}'_2 \\ \boldsymbol{e}'_3 \end{pmatrix} \tag{9.161}$$

より、

$$\boldsymbol{e}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ji}\boldsymbol{e}'_j \tag{9.162}$$

と書かれる。

いま、点 P の座標系 $\mathrm{O}-xyz$ に関する座標を $(x_1, x_2, x_3)$、座標系 $\mathrm{O}-x'y'z'$ に関する座標を $(x'_1, x'_2, x'_3)$ とする。どちらの座標系から見ても同じベクトルなので

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{3} x'_i \boldsymbol{e}'_i \tag{9.163}$$

が成り立つが、式（9.162）を用いると

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} x'_i \boldsymbol{e}'_i &= \sum_{j=1}^{3} x_j \boldsymbol{e}_j \\ &= \sum_{j=1}^{3} x_j \sum_{i=1}^{3} a_{ij} \boldsymbol{e}'_i \end{aligned} \tag{9.164}$$

より、

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{9.165}$$

これが、座標軸の回転を表す座標変換の式である。

ベクトルの変換則も同様に導出される。ベクトル $\boldsymbol{V}$ の座標系 $\mathrm{O}-xyz$ での成分を $(V_1, V_2, V_3)$、座標系 $\mathrm{O}-x'y'z'$ での成分を $(V'_1, V'_2, V'_3)$ とする。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V} &= \sum_{i=1}^{3} V_i \boldsymbol{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^{3} V'_i \boldsymbol{e}'_i \end{aligned} \tag{9.166}$$

が成り立つので、以下のベクトルの変換則が得られる。

$$V'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} V_j \Leftrightarrow \begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \\ V'_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \tag{9.167}$$

この式は、ベクトルの定義として用いることができる。すなわち、座標系の回転により式（9.167）に従って変換されるものベクトルと定義する。一方、座標系の回転によってかわらない量はスカラーと定義される。

## 9.6　テンソル

　先に述べたように、座標変換

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \tag{9.168}$$

の元で、成分が

$$V'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} V_j \tag{9.169}$$

と変換されるものがベクトルである。この考えを拡張し、座標系 $\mathrm{O}-xyz$ において、９つの数 $T_{ij}$（$i, j = 1, 2, 3$）があり、それが回転された座標系 $\mathrm{O}-x'y'z'$ において、$T'_{ij}$ となったする。この時

$$T'_{rs} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ri} a_{sj} T_{ij} \tag{9.170}$$

と書かれるならば、これら９つの数の組をテンソルといい、$T_{ij}$ をテンソルの成分という。記述を簡単にするために $T_{ij}$ を単にテンソルと呼ぶことが多い。テンソルの成分を要素とする行列を $T$（$(T)_{ij} = T_{ij}$）と書くと上の式は

$$T' = ATA^T \tag{9.171}$$

となる。
　テンソルの性質は以下のとおりである。

1. $T_{ij}$ と $S_{ij}$ がテンソルであるならば、その和である $T_{ij} + S_{ij}$ や差 $T_{ij} - S_{ij}$ はテンソルとなる。
2. $\lambda$ を定数とするとき、$\lambda T_{ij}$ はテンソルとなる。
3. ２つのベクトル $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ の成分から作られる量 $T_{ij} = u_i v_j$ はテンソルとなる。
4. 全ての成分が 0 のテンソルをゼロテンソルという。
5. クロネッカーのデルタはテンソルである。
6. $T_{ij}$ をテンソル、$v_i$ をベクトルとすれば、$\sum_j T_{ij} v_j$ および $\sum_j T_{ji} v_j$ はベクトルとなる。

7. 6 の逆も成り立つ。すなわち、任意のベクトル $v_i$ に対して、$\sum_j T_{ij}v_j$ または $\sum_j T_{ji}v_j$ がベクトルとなるならば、$T_{ij}$ はテンソルである。

8. テンソルの成分 $T_{ij}$ に対して $T_{ij} = T_{ji}$ が成り立つものを対称テンソル、$T_{ij} = -T_{ji}$ が成り立つものを反対称テンソルという。反対称テンソルでは $T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$ となる。対称テンソルと反対称テンソルは座標変換をしてもその性質は変わらない。任意のテンソルは対称テンソルと反対称テンソルの和で表すことができる。

### 9.6.1　テンソルの物理例

1. 角速度
図 9.5 のように、剛体が原点 O のまわりに角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転している。[1] 剛体内の点 P の速度 $\boldsymbol{v}$ は、P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすれば

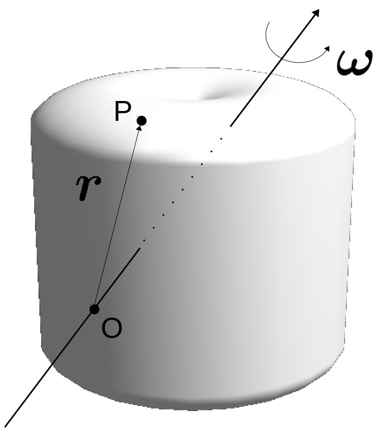


図 9.5: 剛体の回転

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ で与えられる。この式を成分を使って表すと

$$v_1 = \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 \tag{9.172}$$

$$v_2 = \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 \tag{9.173}$$

$$v_3 = \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 \tag{9.174}$$

となる。すなわち

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{9.175}$$

[1] 角速度はベクトル量である。その方向が回転軸を表し、大きさが角速度の大きさである。

と書ける。$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{r}$ は共にベクトルなので、

$$\begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.176}$$

はテンソル（反対称テンソル）となる。

2. 慣性テンソルと主軸変換
剛体を微小な領域の集まりと考える。剛体が原点 O のまわりに角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転しているとする。このとき位置ベクトルが $\boldsymbol{r}^{(i)}$ である $i$ 番目の領域の速度は $\boldsymbol{v}^{(i)} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}^{(i)}$ で与えられる。$i$ 番目の領域の質量を $m^{(i)}$ とすると全角運動量 $\boldsymbol{L}$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \sum_i m^{(i)} \boldsymbol{r}^{(i)} \times \boldsymbol{v}^{(i)} \\ &= \sum_i m^{(i)} \boldsymbol{r}^{(i)} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}^{(i)}) \\ &= \sum_i \left\{ m^{(i)} (\boldsymbol{r}^{(i)} \cdot \boldsymbol{r}^{(i)}) \boldsymbol{\omega} - m^{(i)} \boldsymbol{r}^{(i)} (\boldsymbol{r}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}) \right\} \end{aligned} \tag{9.177}$$

これを成分で書くと

$$L_1 = \sum_i m^{(i)} ([x_2^{(i)}]^2 + [x_3^{(i)}]^2) \omega_1 - \sum_i m^{(i)} x_1^{(i)} x_2^{(i)} \omega_2 - \sum_i m^{(i)} x_1^{(i)} x_3^{(i)} \omega_3 \tag{9.178}$$

$$L_2 = \sum_i m^{(i)} ([x_3^{(i)}]^2 + [x_1^{(i)}]^2) \omega_2 - \sum_i m^{(i)} x_2^{(i)} x_3^{(i)} \omega_3 - \sum_i m^{(i)} x_2^{(i)} x_1^{(i)} \omega_1 \tag{9.179}$$

$$L_3 = \sum_i m^{(i)} ([x_1^{(i)}]^2 + [x_2^{(i)}]^2) \omega_3 - \sum_i m^{(i)} x_3^{(i)} x_1^{(i)} \omega_1 - \sum_i m^{(i)} x_3^{(i)} x_2^{(i)} \omega_2 \tag{9.180}$$

と書ける。ここで、

$$I_{11} = \sum_i m^{(i)}([x_2^{(i)}]^2 + [x_3^{(i)}]^2) \tag{9.181}$$

$$I_{12} = -\sum_i m^{(i)} x_1^{(i)} x_2^{(i)} \tag{9.182}$$

$$I_{13} = -\sum_i m^{(i)} x_1^{(i)} x_3^{(i)} \tag{9.183}$$

$$I_{21} = -\sum_i m^{(i)} x_2^{(i)} x_1^{(i)} \tag{9.184}$$

$$I_{22} = \sum_i m^{(i)}([x_3^{(i)}]^2 + [x_1^{(i)}]^2) \tag{9.185}$$

$$I_{23} = -\sum_i m^{(i)} x_2^{(i)} x_3^{(i)} \tag{9.186}$$

$$I_{31} = -\sum_i m^{(i)} x_3^{(i)} x_1^{(i)} \tag{9.187}$$

$$I_{32} = -\sum_i m^{(i)} x_3^{(i)} x_2^{(i)} \tag{9.188}$$

$$I_{33} = \sum_i m^{(i)}([x_1^{(i)}]^2 + [x_2^{(i)}]^2) \tag{9.189}$$

を定義すると

$$L_i = \sum_{j=1}^{3} I_{ij}\omega_j \leftrightarrow \boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega} \tag{9.190}$$

となる。ここで

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \tag{9.191}$$

$\boldsymbol{L}$ と $\boldsymbol{\omega}$ はベクトルであることから、$I_{ij}$ は対称テンソルであり、慣性テンソル（慣性モーメントテンソル）と呼ばれる。なお、慣性テンソルは以下のように書くこともできる。

$$I_{kl} = \sum_i m^{(i)} \left( [\boldsymbol{r}^{(i)}]^2 \delta_{kl} - x_k^{(i)} x_l^{(i)} \right) \tag{9.192}$$

ただし、$[\boldsymbol{r}^{(i)}]^2 = [x_1^{(i)}]^2 + [x_2^{(i)}]^2 + [x_3^{(i)}]^2$ である。

剛体の回転の運動エネルギーは以下のように慣性テンソルを用いて

表すことができる。

$$\begin{aligned}
T &= \sum_i \frac{1}{2} m^{(i)} [\boldsymbol{v}^{(i)}]^2 \\
&= \sum_i \frac{1}{2} m^{(i)} [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}^{(i)}]^2 \\
&= \sum_{kl} \frac{1}{2} I_{kl} \omega_k \omega_l \qquad (9.193) \\
&= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T I \boldsymbol{\omega} \qquad (9.194)
\end{aligned}$$

慣性テンソルは対称行列なので、固有ベクトルから作られる直交行列で対角化される。すなわち、

$$I\boldsymbol{u}_j = I_j \boldsymbol{u}_j \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{9.195}$$

によって与えられる固有値と固有ベクトルを使って

$$U^T I U = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \tag{9.196}$$

$$\begin{aligned}
U &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \qquad (9.197)
\end{aligned}$$

とかける。ただし、$\boldsymbol{u}_j = (u_{1j}\ u_{2j}\ u_{3j})^T$ である。この対角化が何を意味するかを見るために、直交行列 $U^T$ を用いて座標軸の回転を行ってみる。この時、角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ は以下のように変換される。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}' &= U^T \boldsymbol{L} \\
&= U^T I \boldsymbol{\omega} \\
&= U^T I U U^T \boldsymbol{\omega} \\
&= \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \boldsymbol{\omega}' \qquad (9.198) \\
&\leftrightarrow L'_j = I_j \omega'_j \qquad (j = 1, 2, 3) \qquad (9.199)
\end{aligned}$$

ここで、$\boldsymbol{\omega}' = U^T \omega$ である。この時、回転の運動エネルギーは

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T I \boldsymbol{\omega} \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T U U^T I U U^T \boldsymbol{\omega} \\
&= \frac{1}{2}(U^T\boldsymbol{\omega})^T U^T I U (U^T \boldsymbol{\omega}) \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}'^T \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \boldsymbol{\omega}' \\
&= \frac{1}{2} I_1 {\omega'_1}^2 + \frac{1}{2} I_2 {\omega'_2}^2 + \frac{1}{2} I_3 {\omega'_3}^2 \qquad (9.200)
\end{aligned}
$$

となる。すなわち、慣性テンソルの対角化とは、$U^T$ によって座標軸を回転させること、つまり

$$
\boldsymbol{e}'_i = \sum_j u_{ji} \boldsymbol{e}_j \qquad (9.201)
$$

に対応している。慣性モーメントが対角的になるような直交軸を主軸という。ここでは、$\boldsymbol{e}'_i$ で指定される直交軸が主軸である。また、それに対応する対角要素を主軸モーメントという。このような直交変換のことを主軸変換という。